带有消费习惯的家庭最优资产配置

刘敬真[1] 闫诗琪[1] 林荔圆[1]

（1.中央财经大学　中国精算研究院，北京 100086）

摘要：家庭的资产配置问题是近年研究的热点之一，文章将消费习惯引入到一个由夫妻二人组成的家庭在$[0,T]$时间段上的最优投资、消费和寿险决策问题中。通过将原始优化问题分为共同决策阶段和个体决策阶段的优化问题，对两个阶段分别用动态规划方法求解了值函数满足的Halmiton-Jacob-Bellman 方程，并在 CRRA 的效用函数形式下得到了最优策略的解析解。另外本文利用中国的数据进行了数值模拟并分析了消费习惯对最优策略的影响，发现当考虑消费习惯之后，最优消费支出变为随时间增加；超额消费的部分随消费习惯增大而减少；消费习惯的增加会挤压寿险支出并增加家庭的储蓄率，导致风险投资和家庭寿险支出减少；对过去的消费行为的依赖性越小的家庭，消费支出越平滑。

关键词：消费习惯；动态规划；最优保险；最优投资消费

引　言

1969 年，Merton[1]首次研究了个体的最优消费和投资问题，考虑了个体将资产在风险资产和无风险资产上分配和消费后如何最大化自己的跨期替代效用的决策。1965 年，Yaari [2]首次考虑了具有不确定性寿命的个体的寿险决策。之后 Richard[3]结合 Yaari[2]，在 Merton 的模型基础上引入了遗产效用和寿命的不确定性，增加了个体的寿险决策，同时考虑了收入问题。在 Merton 和 Richard 的基础上，许多学者引入了新的关于市场和个体偏好的假设，使模型更加贴近现实。

但是，在现实生活中人们关心的不仅是个体，而是以家庭为单位进行投资、消费和寿险决策，而由于家庭成员通常有相似的生活习惯，面临共同的风险，所以家庭成员的死亡率有很强的相关性。Hougaard[4]和 Jevtic[5]分别解释和构造了联合生命的死亡率函数。Hong 和 RíosRull[6]在研究家庭的消费和寿险支出时通过实际数据验证了夫妻的效用也会互相影响。这些基础假设的变化，使得家庭的资产配置问题不同于简单地叠加两个个体的最优投资、消费、寿险决策。因此本文需要将家庭视为整体来考虑家庭的最优资产配置。

大部分学者对于家庭资产配置的研究集中于家庭的金融投资和保险投资上，同时把消费包含进来的研究比较少，并且大多数聚焦于用实证数据分析影响消费、投资和寿险支出的因素。李秀芳和王丽珍[7]采用蒙特卡洛模拟，研究最优的家庭资产配置策略，并分析了影响消费、投资和寿险需求的因素。Hubener[8]等用离散的模型研究了一对退休夫妻最优的投资，消费，寿险和年金决策，考虑了婚姻状态，子女个数等对最优决策的影响。Bruhn[9]在连续时间框架下用马尔可夫链将 Merton 的最优投资、消费问题推广到多个生命、多种生存状态的情况，但并未考虑遗产效用；Kwak[10]考虑了两个人的消费，以及父母去世后孩子如何决定消费的情况，但只用一个随机的死亡时间来描述父母的不确定死亡，并未考虑两者间的相关性；危佳钦[11]等研究了夫妻退休前的最优消费、投资和寿险购买策略，并用虚拟参数模拟说明了最优策略，但将夫妻的消费分开考虑，且未考虑到家庭的消费习惯。

收稿日期：

基金项目：国家自然科学基金(11771466)。

作者简介：刘敬真，中央财经大学保险学院副教授，博士生导师，博士；闫诗琪（通讯作者），中央财经大学保险学院博士研究生；林荔圆，中央财经大学保险学院硕士研究生。

对于家庭而言，在进行消费的时候，他们通常希望保留原有的家庭的消费水准，这意味着家庭也具有消费习惯，Camobell[12]和 Lally[13]通过经验数据证明了消费习惯的存在。消费习惯可以分为外部消费习惯和内部消费习惯。Hicks[14]最早用内部偏好模型替代经典模型，其效用函数中包含消费和生活标准，而生活标准则包含了过去消费历史信息，说明消费效用不仅依赖于消费的数量，还取决于消费的增长幅度；Abel[15]首次导出了同时包含内部和外部习惯形成的效用函数。Detemple 和 Zapartero[16]、Detemple 和 Karatzas[17]，他们用鞅方法研究了具有消费习惯的个体的最优投资和消费决策，将消费习惯引入到传统的 Merton 模型中。许多学者聚焦于消费习惯参数的研究，Browning 和 Collado[18]采用了面板数据集研究消费习惯的参数，而 Fuhrer[19]则是通过总消费的欧拉方程研究消费习惯参数；Zhou 和 Jong [20]将通货膨胀考虑了进来，把消费习惯看作由名义消费习惯和实际消费习惯两部分组成。国内学者龙志和等[21]最早用中国数据对居民消费习惯形成进行实证分析，并用最小二乘法计算消费习惯模型中的参数；冯蕾等[22]结合消费习惯，考虑了个体退休前后的消费决策；刘敬真等[23]考虑了带有消费习惯的个体的寿险需求，分析了消费习惯以及人寿保险对个体最优决策的影响。

综合以上文献，国内目前尚未存在把消费习惯引入到家庭投资、消费和寿险决策模型中的文献。本文基于 Richard[3]构建的传统最优个人投资、消费和寿险决策的模型，将其扩展为考虑消费习惯的家庭的最优投资、消费和寿险决策，并考虑了家庭成员寿命之间的相关性，使模型更加合理。同时通过中国的数据实证分析消费习惯对最优策略的影响。本文与危佳钦[11]等研究不同之处在于，将家庭的消费看作整体，由于实际生活中家庭消费多为共同支出，因此研究家庭总消费更符合实际，此外本文引入了家庭的消费习惯，同时利用中国的数据进行了模拟。

假设与建模

1、金融市场

本文考虑由夫妻二人组成的家庭在$[0,T]$时段上的投资、消费和寿险决策。假设$\left(\Omega,\mathcal{F},\{\mathcal{F}_t\}_{t\in[0,T]},P\right)$是一个带满足通常条件的域流①的完备概率空间，以下涉及到的过程都是$\{\mathcal{F}_t\}_{t\in[0,T]}$适应的。假设家庭在$t$时刻拥有的财富为$X(t)$，市场上存在无风险资产和风险资产，其价格随时间的变化过程分别为：

$$\begin{cases} dS_0(t)=S_0(t)rdt \\ dS_1(t)=S_1(t)[\mu dt+\sigma dB(t)] \end{cases}$$

其中r是无风险资产的收益率，μ为风险资产的收益率，σ为风险资产的波动率，$B(t)$是标准布朗运动，$\alpha=\mu-r$是风险资产的超额收益率。

假设在每个时刻t，家庭成员会将家庭财富投资在这两种资产上，其中投资在风险资产上的头寸为$\pi(t)$，剩余财富$X(t)-\pi(t)$投资无风险资产。为了简化问题，这里并不限制家庭的卖空行为，因此$\pi(t)\in\mathbb{R}$。

2、联合生命模型

首先对家庭成员的死亡率进行假设，由于夫妻的寿命存在一定的相依关系，因此本文通过一个联合生命模型来描述夫妻二人的寿命。

假设在$t=0$时，夫妻二人都是存活的，丈夫的剩余寿命为τ_m，妻子的剩余寿命为τ_f，τ_m和τ_f都是随机变量，考虑他们在t时刻的瞬时死亡率，即t时刻的死亡力为

① 通常条件的定义见参考文献[24]。

$$\begin{cases}\lambda_m(t) = \lim\limits_{\Delta t\to 0}\dfrac{P(t \le \tau_m \le t+\Delta t|\tau_m \ge t)}{\Delta t}\\ \lambda_f(t) = \lim\limits_{\Delta t\to 0}\dfrac{P\left(t \le \tau_f \le t+\Delta t\middle|\tau_f \ge t\right)}{\Delta t}\end{cases}$$

从而可以得到他们的生存概率和死亡时间的密度函数，

$$\begin{cases}S_m(t) = P(\tau_m > t) = e^{-\int_0^t \lambda_m(s)ds}, \qquad f_m(t) = \lambda_m(t)e^{-\int_0^t \lambda_m(s)ds}\\ S_f(t) = P\left(\tau_f > t\right) = e^{-\int_0^t \lambda_f(s)ds}, \qquad f_f(t) = \lambda_f(t)e^{-\int_0^t \lambda_f(s)ds}\end{cases}$$

本文用 Copula 函数来描述τ_m和τ_f的相依关系，即夫妻二人的联合生存概率为

$$S\left(t_m,t_f\right) = P\left(\tau_m > t_m, \tau_f > t_f\right) = C\left(S_m(t_m), S_f\left(t_f\right)\right)$$

其中 Copula 函数$C: [0,1]\times[0,1] \to [0,1]$需要满足：

（1）$C(u,0) = C(0,v) = 0$；$C(u,1) = u$；$C(1,v) = v$；

（2）$0 \le \frac{\partial C(u,v)}{\partial u} \le 1$；$0 \le \frac{\partial C(u,v)}{\partial v} \le 1$。

可以看到，当$C(u,v) = uv$时，两者的死亡率并不相关。故而，联合生存的概率密度函数$f(u,v)$满足

$$\int_{t_m}^{+\infty}\int_{t_f}^{+\infty} f(u,v)dv\,du = S\left(t_m,t_f\right)$$

令$F_m\left(t_m,t_f\right) = -\frac{\partial S(t_m,t_f)}{\partial t_f} = \int_{t_m}^{+\infty} f\left(u,t_f\right)du$，$F_f\left(t_m,t_f\right) = -\frac{\partial S(t_m,t_f)}{\partial t_m} = \int_{t_f}^{+\infty} f(t_m,v)dv$。根据 Copula 模型，可以计算得到

$$\begin{cases}F_m\left(t_m,t_f\right) = C_2\left(S_m(t_m), S_f\left(t_f\right)\right)S_f\left(t_f\right)\lambda_f\left(t_f\right) & (1)\\ F_f\left(t_m,t_f\right) = C_1\left(S_m(t_m), S_f\left(t_f\right)\right)S_m(t_m)\lambda_m(t_m) & (2)\end{cases}$$

假设夫妻二人最先发生死亡的时刻为$\tau_1 = \tau_m \wedge \tau_f$，最后发生死亡的时刻为$\tau_2 = \tau_m \vee \tau_f$，则对于$\tau_1$而言，其生存函数和密度函数如下

$$S_{\tau_1}(t) = P(\tau_1 > t) = P\left(\tau_m \wedge \tau_f > t\right) = P\left(\tau_m > t, \tau_f > t\right) = S(t,t)$$

$$f_{\tau_1}(t) = -\frac{\partial S_{\tau_1}(t)}{\partial t}$$

由于$S(t,t) = C\left(S_m(t), S_f(t)\right)$，进而可以将$f_{\tau_1}(t)$写成如下形式

$$\begin{aligned}f_{\tau_1}(t) &= C_1\left(S_m(t), S_f(t)\right)S_m(t)\lambda_m(t) + C_2\left(S_m(t), S_f(t)\right)S_f(t)\lambda_f(t)\\ &= F_m(t,t) + F_f(t,t).\end{aligned}$$

若两者死亡率不相关，由上述等式可以得到$C_1\left(S_m(t), S_f(t)\right) = S_f(t)$，$C_2\left(S_m(t), S_f(t)\right) = S_m(t)$，$f_{\tau_1}(t) = S_f(t)S_m(t)\left[\lambda_m(t) + \lambda_f(t)\right]$，即当夫妻双方死亡率不相关时，可以简单地将他们二人的联合生命死亡力看作两个个体死亡力的相加。

3、保险市场

假设保险公司在市场上销售一种瞬时（保险期间无穷短）的个体人寿保险。在 t 时刻丈夫（或妻子）购买一单位保险金额的寿险保费为$\eta_m(t)$（或$\eta_f(t)$）。由于保险公司在销售保险产品的时候会收取一定的费用和利润，通常有$\eta_m(t) \ge \lambda_m(t)$（或$\eta_f(t) \ge \lambda_f(t)$）。在$t$时刻家庭花费$p_m(t)$为丈夫购买人寿保险，$p_f(t)$为妻子购买人寿保险。如果有家庭成员死亡，则会出现以下情况：

(1) 丈夫死亡

如果在下一个时刻$t+\Delta t$（$\Delta t\to 0$）丈夫死亡，家庭会得到$p_m(\mathrm{t})/\eta_m(t)$的保险金，如果此时妻子存活，这笔保险金将变成家庭财富的一部分，用于投资、消费和寿险支出；如果此时妻子已经过世，那么这笔保险金连同死亡时剩下的财富，即$X(t)+p_m(t)/\eta_m(t)$，将成为遗产留给财产继承人。

(2) 妻子死亡

如果在下一个时刻$t+\Delta t$（$\Delta t\to 0$）妻子死亡，家庭会得到$p_f(\mathrm{t})/\eta_f(t)$的保险金，如果此时丈夫存活，保险金将用于之后的支出；如果此时丈夫已经过世，$X(t)+p_f(t)/\eta_f(t)$将成为遗产留给财产继承人。

(3) 丈夫和妻子同时死亡

如果在下一个时刻$t+\Delta t$（$\Delta t\to 0$）丈夫和妻子同时死亡，那么他们的继承人将得到$X(t)+p_f(t)/\eta_f(t)+p_m(t)/\eta_m(t)$的遗产。在这里本文并不假设$p_f(t)\geq 0$ 或$p_m(t)\geq 0$，当出现$p_f(t)$或$p_m(t)$为负时，将视为个体购买了生存保险。

4、消费习惯

假设在t时刻家庭的消费总支出为$c(t)$。本文延续 Detemple[17]中的定义，将家庭的消费习惯视为消费支出的一个最低标准，定义为：

$$H(t)=\begin{cases} e^{-at}H_0+b\int_0^t e^{a(s-t)}\,c(s)ds, & t\in[0,\tau_1) \\ \omega H(t_-)I_{\{\tau_m<\tau_f\}}+(1-\omega)H(t_-)I_{\{\tau_f\leq\tau_m\}}, & t=\tau_1 \\ e^{-a(t-\tau_1)}H_{\tau_1}+b\int_{\tau_1}^t e^{a(s-t)}\,c(s)ds, & t\in(\tau_1,\tau_2] \end{cases}$$

当夫妻双方都存活时，消费习惯由过去的消费加权平均得到，其中a度量了家庭对过去消费的遗忘程度，b度量了家庭对于过去消费的依赖程度，通常本文有$a>0, b>0$。H_0为家庭初始消费习惯。由此可知a越小，b越大，H_0越大，消费习惯越大。

由于当家庭中夫妻双方都生存的情况下，消费习惯是由两人共同消费形成的，当夫妻双方有一人过世后，本文假设消费习惯将按比例下降为只有一个人消费的生活标准。假设丈夫死亡后，妻子将会把消费习惯降为原来的ω倍，同理，妻子死亡后，丈夫将会把消费习惯降为原来的 $1-\omega$倍，$\omega\in[0,1]$。在一方死亡后，另一方会在调整过去消费习惯的基础上，继续通过对过去消费的加权平均建立自己的消费习惯。$H(t)$的微分方程为：

$$\begin{cases} dH(t)=\begin{cases}[bc(t)-aH(t)]dt, & t\in[0,\tau_1)\cup(\tau_1,\tau_2] \\ (\omega-1)H(t_-)I_{\{\tau_m<\tau_f\}}-\omega H(t_-)I_{\{\tau_f\leq\tau_m\}}, & t=\tau_1\end{cases} \\ H(0)=H_0 \end{cases} \tag{3}$$

财富过程与目标函数

1、财富过程

与个体投资-消费-寿险决策问题不同，夫妻二人的生存状态将影响到财富过程的变化。因此，以τ_1时刻为分界点，分别讨论夫妻二人共同生存和只有一人生存的情况下财富变化过程。

(1) $t\in[0,\tau_1)$，夫妻双方共同生存时期的财富变化过程

假设家庭在 0 时刻的财富为X_0，在t时刻他们会得到两人的收入$i_m(t)$和$i_f(t)$；风险及无风险资产投资收益分别为 $\pi(t)dS_1(t)/S_1(t)$和$\big(X(t)-\pi(t)\big)dS_0(t)/S_0(t)$。同时家庭消费支出$c(t)$，保险支出为$p_m(t)$和$p_f(t)$。因此，当$t\in[0,\tau_1)$时，财富变化过程服从

$$dX(t)=\pi(t)\frac{dS_1(t)}{S_1(t)}+\big(X(t)-\pi(t)\big)\frac{dS_0(t)}{S_0(t)}+\big[i_m(t)+i_f(t)-p_m(t)-p_f(t)-c(t)\big]dt$$

$$= \left[rX(t) + \alpha\pi(t) - c(t) + i_m(t) + i_f(t) - p_m(t) - p_f(t)\right]dt + \sigma\pi(t)dB(t)$$

(2) τ_1时刻财富变化过程

由于夫妻双方中一方死亡，保险金会进入家庭财富，用于日后的生活。若丈夫先于妻子死亡，即$\tau_m < \tau_f$，家庭财富将增加$p_m(\tau_{1_})/\eta_m(\tau_{1_})$。若丈夫先于妻子死亡，即$\tau_f < \tau_m$，家庭财富将增加$p_m(\tau_{1_})/\eta_m(\tau_{1_})$。若夫妻二人同时死亡，那么家庭财富将变为$X(\tau_{1-}) + p_m(\tau_{1_})/\eta_m(\tau_{1_})$+$p_m(\tau_{1\_})/\eta_m(\tau_{1\_})$，并作为遗产留给他们的继承人。故在$t = \tau_1$时，有

$$dX(t) = \frac{p_m(t_\_)}{\eta_m(t_\_)} I_{\{\tau_m<\tau_f\}} + \frac{p_f(t_\_)}{\eta_f(t_\_)} I_{\{\tau_f\le\tau_m\}}$$

(3) $t \in (\tau_1, \tau_2)$，只有一人生存时期财富变化过程

仅有存活的一方有收入且可以购买寿险。家庭的财富变化过程为

$$\begin{aligned} dX(t) &= \pi(t)\frac{dS_1(t)}{S_1(t)} + \left(X(t) - \pi(t)\right)\frac{dS_0(t)}{S_0(t)} + i_m(t)I_{\{\tau_m>\tau_f\}} + i_f(t)I_{\{\tau_f>\tau_m\}} - p_m(t)I_{\{\tau_m>\tau_f\}} \\ &\quad - p_f(t)I_{\{\tau_f>\tau_m\}} - c(t)dt \\ &= \left[rX(t) + \alpha\pi(t) - c(t) + i_m(t)I_{\{\tau_m>\tau_f\}} + i_f(t)I_{\{\tau_f>\tau_m\}} - p_m(t)I_{\{\tau_m>\tau_f\}} - p_f(t)I_{\{\tau_f>\tau_m\}}\right]dt \\ &\quad + \sigma\pi(t)dB(t) \end{aligned}$$

综上所述，家庭财富的变化过程为

$$\begin{cases} dX(t) = \begin{cases} [rX(t) + \alpha\pi(t) - c(t) + i_m(t) + i_f(t) - p_m(t) - p_f(t)] \\ \quad + \sigma\pi(t)dB(t), & t \in [0, \tau_1) \\ \dfrac{p_m(t_\_)}{\eta_m(t_\_)} I_{\{\tau_m<\tau_f\}} + \dfrac{p_f(t_\_)}{\eta_f(t_\_)} I_{\{\tau_f\le\tau_m\}}, & t = \tau_1 \\ [rX(t) + \alpha\pi(t) - c(t) + i_m(t)I_{\{\tau_m>\tau_f\}} + i_f(t)I_{\{\tau_f>\tau_m\}} \\ - p_m(t)I_{\{\tau_m>\tau_f\}} - p_f(t)I_{\{\tau_f>\tau_m\}}]dt + \sigma\pi(t)dB(t), & t \in (\tau_1, \tau_2] \end{cases} \\ X(0) = X_0 \end{cases}$$

2、可行策略集合

本文称$\boldsymbol{u}(t) = \{c(t), \pi(t), p_m(t), p_f(t)\}$为共同策略，即在夫妻都生存的情况下，两人共同做出的策略。

定义 1：如果策略$\boldsymbol{u}(t)$满足：

（1）是$\{\mathcal{F}_t\}_{t\in[0,T]}$可测的；

（2）对于$\forall x \in \mathbb{R}$，随机微分方程

$$\begin{cases} dX(t) = \left[rX(t) + \alpha\pi(t) - c(t) + i_m(t) + i_f(t) - p_m(t) - p_f(t)\right]dt \\ \qquad\qquad + \sigma\pi(t)dB(t) \\ X(0) = x \end{cases}$$

有唯一强解；

（3）$\forall t \in [0, T]$，$c(t) \ge H(t)$，$X(t) + p_m(t)/\eta_m(t) \ge 0$，$X(t) + p_f(t)/\eta_f(t) \ge 0$ 以及 $X(T) \ge 0$；

（4）$E\left[\int_0^T |\pi(s)\sigma(s)|^2 ds\right] < +\infty$，$E\left[\int_0^T |c(s)| ds\right] < +\infty$。

则称策略$\boldsymbol{u}(t)$是一个可行的共同策略，所有可行共同策略$\boldsymbol{u}(t)$组成的集合为$\mathcal{A}$。

丈夫死亡后，只有妻子进行决策。妻子可以控制的决策变量为$\boldsymbol{u}_f(t) = \{c(t), \pi(t), p_f(t)\}$，称$\boldsymbol{u}_f(t)$为妻子的策略。

定义 2：如果策略$\boldsymbol{u}_f(t)$满足：

（1）是$\{\mathcal{F}_t\}_{t\in[0,T]}$可测的；

（2）对于$\forall(t,x)\in[0,T]\times\mathbb{R}$，随机微分方程

$$\begin{cases} dX(s)=\left[rX(s)+\alpha\pi(s)-c(s)+i_f(s)-p_f(s)\right]ds+\sigma\pi(s)dB(s) \\ X(t)=x \end{cases}$$

有唯一强解；

（3）$\forall t\in[0,T]$，$c(t)\geq H(t)$，以及$X(T)\geq 0$；

（4）$\forall t\in[0,T]$，$E\left[\int_t^T|\pi(s)\sigma(s)|^2ds\right]<+\infty$，$E\left[\int_t^T|c(s)|ds\right]<+\infty$。

则称策略$\boldsymbol{u}_f(t)$是一个妻子的可行策略，所有妻子的可行策略$\boldsymbol{u}_f(t)$组成的集合为$\mathcal{A}_f$。同理，当妻子死亡之后，只有丈夫进行决策，所有丈夫的可行策略$\boldsymbol{u}_m(t)$组成的集合为$\mathcal{A}_m$。

3、目标函数

（1）初始优化问题

本文通过所选择的策略给家庭成员带来的效用来衡量策略的优劣，家庭成员在$\mathcal{A},\mathcal{A}_f,\mathcal{A}_m$中选择最优的策略，实现家庭总效用的最大化。因此，目标为

$$\max_{\boldsymbol{u}\in\mathcal{A},\boldsymbol{u}_f\in\mathcal{A}_f,\boldsymbol{u}_m\in\mathcal{A}_m}E\left[\int_0^{\tau_2\wedge T}U\big(c(t)-H(t)\big)e^{-\beta t}dt+U\left(X(\tau_m)+\frac{p_m(\tau_m)}{\eta_m(\tau_m)}\right)e^{-\beta\tau_m}I_{\{\tau_f\leq\tau_m\leq T\}}\right.$$
$$\left.+U\left(X(\tau_f)+\frac{p_f(\tau_f)}{\eta_f(\tau_f)}\right)e^{-\beta\tau_f}I_{\{\tau_m<\tau_f\leq T\}}+U\big(X(T)\big)e^{-\beta T}I_{\{T<\tau_2\}}\right]$$

s.t.

$$\begin{cases} dX(t)=\begin{cases} [rX(t)+\alpha\pi(t)-c(t)+i_m(t)+i_f(t)-p_m(t)-p_f(t)] \\ \quad +\sigma\pi(t)dB(t), & t\in[0,\tau_1) \\ \dfrac{p_m(t_-)}{\eta_m(t_-)}I_{\{\tau_m<\tau_f\}}+\dfrac{p_f(t_-)}{\eta_f(t_-)}I_{\{\tau_f\leq\tau_m\}}, & t=\tau_1 \\ [rX(t)+\alpha\pi(t)-c(t)+i_m(t)I_{\{\tau_m>\tau_f\}}+i_f(t)I_{\{\tau_f>\tau_m\}} \\ -p_m(t)I_{\{\tau_m>\tau_f\}}-p_f(t)I_{\{\tau_f>\tau_m\}}]dt+\sigma\pi(t)dB(t), & t\in(\tau_1,\tau_2] \end{cases} \\ X(0)=X_0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} dH(t)=\begin{cases} [bc(t)-aH(t)]dt, & t\in[0,\tau_1)\cup(\tau_1,\tau_2] \\ (\omega-1)H(t_-)I_{\{\tau_m<\tau_f\}}-\omega H(t_-)I_{\{\tau_f\leq\tau_m\}}, & t=\tau_1 \end{cases} \\ H(0)=H_0 \end{cases}$$

其中$U(x)$是定义在$[0,+\infty)$上的，满足 Inada 条件的效用函数，即$U'(x)>0$，$U''(x)<0$，$\lim_{x\to 0}U'(x)=+\infty$，$\lim_{x\to+\infty}U'(x)=0$。说明家庭是风险厌恶的，超额消费以及终端时刻财富越多，获得的效用越高。此时的优化问题并不满足使用标准动态规划方法的形式，本文将通过以下转换使得该优化问题可以通过标准动态规划方法来处理。

（2）转换后的优化问题

本文将优化问题分为两阶段，第一阶段是夫妻双方都生存的时段，即$[0,\tau_1\wedge T)$，称为共同决策阶段。第二阶段是当夫妻双方中有一人过世，即$(\tau_1\wedge T,\tau_2\wedge T)$。此时家庭的最优投资、消费和寿险决策退化为个体的最优投资、消费和寿险决策问题，称为个体决策阶段。需要注意两种特殊情况，当$\tau_m=\tau_f\leq T$时，即夫妻双方在T时刻前同时死亡，此时没有个体决策阶段，夫妻二人留下$X(\tau_{f-})+p_m(\tau_{m-})/\eta_m(\tau_{m-})+p_f(\tau_{f-})/\eta_f(\tau_{f-})$的遗产；当$T>\tau_1$时，即夫妻双方都存活到$T$时刻后，个体决策阶段也不会进行，家庭的总效用除了来自共同决策阶段的超额消费外，还有T时刻的财富效用。

A.个体决策阶段的优化问题

若丈夫先于妻子死亡，即$\tau_m<\tau_f$，个体决策阶段由妻子决定，妻子在$\mathcal{A}_f$中选择可行的$\boldsymbol{u}_f$，最大化丈夫死后时刻τ_m到T或τ_f这一时间段上的总期望效用。这一阶段的优化问题为：

$$\max_{\boldsymbol{u}_f\in\mathcal{A}_f} E\left[\int_{\tau_m}^{\tau_f\wedge T} U\big(c(t)-H(t)\big)e^{-\beta(t-\tau_m)}dt + U\left(X(\tau_f)+\frac{p_f(\tau_f)}{\eta_f(\tau_f)}\right)e^{-\beta(\tau_f-\tau_m)}I_{\{\tau_f\le T\}} + U\big(X(T)\big)e^{-\beta(T-\tau_m)}I_{\{T<\tau_f\}}\right]$$

s.t.

$$\begin{cases} dX(t)=\big[rX(t)+\alpha\pi(t)-c(t)+i_f(t)-p_f(t)\big]dt+\sigma\pi(t)dB(t)\\ X(\tau_m)=X(\tau_{m-})+\dfrac{p_m(\tau_{m-})}{\eta_m(\tau_{m-})}\end{cases}$$

$$\begin{cases} dH(t)=[bc(t)-aH(t)]dt\\ H(\tau_m)=\omega H(\tau_{m-})\end{cases}$$

定义第二阶段妻子的目标函数为

$$J^f\big(t,x,h;\boldsymbol{u}_f\big)=E_{t,x,h}\left[\int_t^{\tau_f\wedge T} U\big(c(s)-H(s)\big)e^{-\beta(s-t)}ds + U\left(X(\tau_f)+\frac{p_f(\tau_f)}{\eta_f(\tau_f)}\right)e^{-\beta(\tau_f-t)}I_{\{\tau_f\le T\}} + U\big(X(T)\big)e^{-\beta(T-t)}I_{\{T<\tau_f\}}\middle|\tau_f>t\right] \tag{4}$$

值函数为：$V^f(t,x,h)=J^f\big(t,x,h;\boldsymbol{u}_f^*\big)=\underset{\boldsymbol{u}_f\in\mathcal{A}_f}{max}J^f\big(t,x,h;\boldsymbol{u}_f\big)$，其中$E_{t,x,h}[\cdot]=E[\cdot|X(t)=x,H(t)=h]$。

若妻子先于丈夫死亡，即$\tau_f\le\tau_m$，个体决策阶段的决策由丈夫决定，丈夫在$\mathcal{A}_{\rm m}$中选择可行的$\boldsymbol{u}_m$，最大化妻子死亡后到T或τ_m这一时间段的总期望效用。这一阶段的优化问题为：

$$\max_{\boldsymbol{u}_m\in\mathcal{A}_m} E\left[\int_{\tau_f}^{\tau_m\wedge T} U\big(c(t)-H(t)\big)e^{-\beta(t-\tau_f)}dt + U\left(X(\tau_m)+\frac{p_m(\tau_m)}{\eta_m(\tau_m)}\right)e^{-\beta(\tau_m-\tau_f)}I_{\{\tau_m\le T\}} + U\big(X(T)\big)e^{-\beta(T-\tau_f)}I_{\{T<\tau_m\}}\right]$$

s.t.

$$\begin{cases} dX(t)=[rX(t)+\alpha\pi(t)-c(t)+i_m(t)-p_m(t)]dt+\sigma\pi(t)dB(t)\\ X(\tau_f)=X(\tau_{f-})+\dfrac{p_f(\tau_{f-})}{\eta_f(\tau_{f-})}\end{cases}$$

$$\begin{cases} dH(t)=[bc(t)-aH(t)]dt\\ H(\tau_f)=(1-\omega)H(\tau_{f-})\end{cases}$$

定义第二阶段丈夫的目标函数为

$$J^m(t,x,h;\boldsymbol{u}_m)=E_{t,x,h}\left[\int_t^{\tau_m\wedge T} U\big(c(s)-H(s)\big)e^{-\beta(s-t)}ds + U\left(X(\tau_m)+\frac{p_m(\tau_m)}{\eta_m(\tau_m)}\right)e^{-\beta(\tau_m-t)}I_{\{\tau_m\le T\}} + U\big(X(T)\big)e^{-\beta(T-t)}I_{\{T<\tau_m\}}\middle|\tau_m>t\right], \tag{5}$$

值函数为：$V^m(t,x,h)=J^m(t,x,h;\boldsymbol{u}_m^*)=\max_{\boldsymbol{u}_m\in\mathcal{A}_m}J^m(t,x,h;\boldsymbol{u}_m)$。

需要注意的是，当$\tau_m=\tau_f\le T$时，从（5）中有

$$V^m\Big(\tau_f,X\big(\tau_f\big),H\big(\tau_f\big)\Big)=U\left(X\big(\tau_{f-}\big)+\frac{p_m(\tau_{m-})}{\eta_m(\tau_{m-})}+\frac{p_f\big(\tau_{f-}\big)}{\eta_f\big(\tau_{f-}\big)}\right)。$$

B.共同决策阶段的优化问题

现在考虑共同决策阶段$[0,\tau_1\wedge T)$的优化问题。

$$\max_{\boldsymbol{u}\in\mathcal{A}} E\left\{\int_0^{\tau_1\wedge T} U\big(c(t)-H(t)\big)e^{-\beta t}dt + V^f\left(\tau_{m-},X(\tau_{m-})+\frac{p_m(\tau_{m-})}{\eta_m(\tau_{m-})},\omega H(\tau_{m-})\right)e^{-\beta\tau_m}I_{\{\tau_m<\tau_f\}}I_{\{\tau_m\le T\}} + V^m\left(\tau_{f-},X(\tau_{f-})+\frac{p_f(\tau_{f-})}{\eta_f(\tau_{f-})},(1-\omega)H(\tau_{f-})\right)e^{-\beta\tau_f}I_{\{\tau_f\le\tau_m\}}I_{\{\tau_f\le T\}} + U\big(X(T)\big)e^{-\beta T}I_{\{\tau_1>T\}}\right\}$$

s.t.

$$\begin{cases} dX(t)=\big[rX(t)+\alpha\pi(t)-c(t)+i_m(t)+i_f(t)-p_m(t)-p_f(t)\big]dt+\sigma\pi(t)dB(t) \\ X(0)=X_0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} dH(t)=[bc(t)-aH(t)]dt \\ H(0)=H_0 \end{cases}$$

定义目标函数

$$J(t,x,h;\boldsymbol{u})=E_{t,x,h}\left[\int_t^{\tau_1\wedge T} U\big(c(s)-H(s)\big)e^{-\beta(s-t)}ds + V^f\left(\tau_{m-},X(\tau_{m-})+\frac{p_m(\tau_{m-})}{\eta_m(\tau_{m-})},\omega H(\tau_{m-})\right)e^{-\beta(\tau_m-t)}I_{\{\tau_m<\tau_f\}}I_{\{\tau_m\le T\}} + V^m\left(\tau_{f-},X\big(\tau_{f-}\big)+\frac{p_f(\tau_{f-})}{\eta_f\big(\tau_{f-}\big)},(1-\omega)H\big(\tau_{f-}\big)\right)e^{-\beta(\tau_f-t)}I_{\{\tau_f\le\tau_m\}}I_{\{\tau_f\le T\}} + U\big(X(T)\big)e^{-\beta(T-t)}I_{\{\tau_1>T\}}/\tau_1>t\right] \tag{6}$$

值函数为：$V(t,x,h)=J(t,x,h;\boldsymbol{u}^*)=\max_{\boldsymbol{u}\in\mathcal{A}} J(t,x,h;\boldsymbol{u})$。

定理 1 保证了将初始优化问题分解为个体决策阶段和共同决策阶段的优化问题可以在 0 时刻得到一样大小值函数。

定理 1：对$\forall(x,h)\in\mathbb{R}\times\mathbb{R}^+$，有

$$V(0,x,h)=\max_{\boldsymbol{u}\in\mathcal{A},\boldsymbol{u}_f\in\mathcal{A}_f,\boldsymbol{u}_m\in\mathcal{A}_m} E_{0,x,h}\left[\int_0^{\tau_2\wedge T} U\big(c(t)-H(t)\big)e^{-\beta t}dt + U\left(X(\tau_m)+\frac{p_m(\tau_m)}{\eta_m(\tau_m)}\right)e^{-\beta\tau_m}I_{\{\tau_f\le\tau_m\le T\}} + U\left(X\big(\tau_f\big)+\frac{p_f\big(\tau_f\big)}{\eta_f\big(\tau_f\big)}\right)e^{-\beta\tau_f}I_{\{\tau_m<\tau_f\le T\}} + U\big(X(T)\big)e^{-\beta T}I_{\{T<\tau_2\}}\right]$$

证明：见附录 1。

进而，通过将个体和共同决策阶段的优化问题的目标函数转换为定理 2 中的形式，便于使用 HJB 方程来求解最优策略。

定理 2：目标函数（4）、（5）、（6）可以转换成以下形式：

$$J^f\big(t,x,h;\boldsymbol{u}_f\big)=E_{t,x,h}\left\{\int_t^T\left[U\big(c(s)-H(s)\big)+\lambda_f(s)U\left(X(s)+\frac{p_f(s)}{\eta_f(s)}\right)\right]e^{-\int_t^s\beta+\lambda_f(v)dv}ds + U\big(X(T)\big)e^{-\int_t^T\beta+\lambda_f(v)dv}\right\}$$

$$J^m(t,x,h;\boldsymbol{u}_m)= E_{t,x,h}\left\{\int_t^T \left[U\big(c(s)-H(s)\big)+\lambda_m(s)U\left(X(s)+\frac{p_m(s)}{\eta_m(s)}\right)\right]e^{-\int_t^s \beta+\lambda_m(v)dv}ds + U\big(X(T)\big)e^{-\int_t^T \beta+\lambda_m(v)dv}\right\}$$

$$J(t,x,h;\boldsymbol{u}) = E_{t,x,h}\left[\int_t^T U\big(c(s)-H(s)\big)e^{-\beta(s-t)}\frac{S(s,s)}{S(t,t)}ds + \int_t^T V^f\left(s, X(s)+\frac{p_m(s)}{\eta_m(s)}, \omega H(s)\right)e^{-\beta(s-t)}\frac{F_f(s,s)}{S(t,t)}ds + \int_t^T V^m\left(s, X(s)+\frac{p_f(s)}{\eta_f(s)}, (1-\omega)H(s)\right)e^{-\beta(s-t)}\frac{F_m(s,s)}{S(t,t)}ds + U\big(X(T)\big)e^{-\beta(T-t)}\frac{S(T,T)}{S(t,t)}\right]$$

证明：见附录 2。

综上所述，本文通过分阶段考虑初始优化问题，将其转换为共同决策阶段和个体决策阶段的优化问题。

CRRA 效用函数下的最优策略

CRRA 效用函数的形式为$U(x)=\frac{x^{1-\gamma}}{1-\gamma}$，其中$\gamma>0$ 且$\gamma\neq 1$，意味着家庭具有常相对风险厌恶系数。本文求解最优策略时，先从个体决策阶段开始，得到相应值函数，再考虑共同决策阶段。

1、个体决策阶段

（1）在个体决策阶段，如果丈夫先于妻子死亡：

根据 Yong 和 Zhou[25]，得到$V^f(t,x,h)$满足的 HJB 方程和最优策略$\boldsymbol{u}_f^*$为:

$$\begin{cases} sup_{\boldsymbol{u}_f\in\mathcal{A}_f}\{-[\beta+\lambda_f(t)]V^f+V_t^f+V_x^f[rx+\alpha\pi-c-p_f+i_f(t)]+\frac{1}{2}V_{xx}^f\sigma^2\pi^2 \\ \qquad +V_h^f[bc-ah]+U(c-h)+\lambda_f(t)U\left(x+\frac{p_f}{\eta_f(t)}\right)\}=0 \\ V^f(T,x,h)=U(x) \end{cases} \tag{7}$$

$$\boldsymbol{u}_f^* = argsup_{\boldsymbol{u}_f\in\mathcal{A}_f}\left\{-[\beta+\lambda_f(t)]V^f+V_t^f+V_x^f[rx+\alpha\pi-c-p_f+i_f(t)]+\frac{1}{2}V_{xx}^f\sigma^2\pi^2 + V_h^f[bc-ah]+U(c-h)+\lambda_f(t)U\left(x+\frac{p_f}{\eta_f(t)}\right)\right\}$$

根据一阶条件，妻子的最优策略满足

$$\begin{cases} \pi=-\frac{\alpha V_x^f}{V_{xx}^f\sigma^2} \\ U'(c-h)=V_x^f-bV_h^f \\ U'\left(\frac{p_f}{\eta_f(t)}+x\right)=\frac{\eta_f(t)}{\lambda_f(t)}V_x^f, \end{cases}$$

推论 1：妻子的值函数$V^f(t,x,h)=A^f(t)\frac{[x+B^f(t)+D^f(t)h]^{1-\gamma}}{1-\gamma}$是 HJB 方程的解，其中

$$\begin{cases} A^f(t)=\left\{ \begin{array}{c} e^{-\int_t^T \frac{\gamma-1}{\gamma}\left(-\frac{\beta+\lambda_f(v)}{1-\gamma}+\frac{\alpha^2}{2\gamma\sigma^2}+r+\eta_f(v)\right)dv} \\ +\int_t^T \left[\left[1-bD^f(s)\right]^{\frac{\gamma-1}{\gamma}}+\left[\eta_f(s)\right]^{\frac{\gamma-1}{\gamma}}\left[\lambda_f(s)\right]^{\frac{1}{\gamma}}\right] e^{-\int_t^S \frac{\gamma-1}{\gamma}\left(-\frac{\beta+\lambda_f(v)}{1-\gamma}+\frac{\alpha^2}{2\gamma\sigma^2}+r+\eta_f(v)\right)dv} ds \end{array} \right\}^{\gamma} \\ B^f\ (t)=\int_t^T i_f(s)e^{-\int_t^s[r+\eta_f(v)]dv}ds \\ D^f(t)=-\int_t^T e^{-\int_t^s[r+\eta_f(v)-b+a]dv}ds \end{cases}$$

妻子的最优决策为

$$\begin{cases} c=\left[A^f(t)-bA^f(t)D^f(t)\right]^{-\frac{1}{\gamma}}\left[x+B^f(t)+D^f(t)h\right]+h \\ p^f=\eta_f(t)\left\{\left[\frac{\eta_f(t)}{\lambda_f(t)}A^f(t)\right]^{-\frac{1}{\gamma}}\left[x+B^f(t)+D^f(t)h\right]-x\right\} \\ \pi=\frac{\alpha}{\sigma^2\gamma}\left[x+B^f(t)+D^f(t)h\right] \end{cases} \tag{8}$$

证明：见附录 3。

（2）在个体决策阶段，如果妻子先于丈夫死亡：

根据 Yong 和 Zhou[25]，得到值函数$V^f(t,x,h)$和最优策略$\boldsymbol{u}_m^*$满足如下方程

$$\begin{cases} sup_{\boldsymbol{u}_m\in\mathcal{A}_m}\{-[\beta+\lambda_m(t)]V^m+V_t^m+V_x^m[rx+\alpha\pi-c-p_m+i_m(t)]+\frac{1}{2}V_{xx}^m\sigma^2\pi^2 \\ \qquad +V_h^m[bc-ah]+U(c-h)+\lambda_m(t)U\left(x+\frac{p_m}{\eta_m(t)}\right)\}=0 \\ V^m(T,x,h)=U(x) \end{cases} \tag{9}$$

$$\boldsymbol{u}_m^*=argsup_{\boldsymbol{u}_m\in\mathcal{A}_m}\left\{-[\beta+\lambda_m(t)]V^m+V_t^m+V_x^m[rx+\alpha\pi-c-p_m+i_m(t)]+\frac{1}{2}V_{xx}^m\sigma^2\pi^2 \right. \\ \left. +V_h^m[bc-ah]+U(c-h)+\lambda_m(t)U\left(x+\frac{p_m}{\eta_m(t)}\right)\right\}$$

根据一阶条件，丈夫的最优策略满足

$$\begin{cases} \pi=-\frac{\alpha V_x^m}{V_{xx}^m\sigma^2} \\ U'(c-h)=V_x^m-bV_h^m \\ U'\left(\frac{p_m}{\eta_m(t)}+x\right)=\frac{\eta_m(t)}{\lambda_m(t)}V_x^f \end{cases}$$

推论 2：丈夫的值函数$V^m(t,x,h)=A^m(t)\frac{[x+B^m(t)+D^m(t)h]^{1-\gamma}}{1-\gamma}$是 HJB 方程的解，其中

$$\begin{cases} A^m(t)=\left\{ \begin{array}{c} e^{-\int_t^T \frac{\gamma-1}{\gamma}\left(-\frac{\beta+\lambda_m(v)}{1-\gamma}+\frac{\alpha^2}{2\gamma\sigma^2}+r+\eta_m(v)\right)dv} \\ +\int_t^T \left[\left[1-bD^m(s)\right]^{\frac{\gamma-1}{\gamma}}+\left[\eta_m(s)\right]^{\frac{\gamma-1}{\gamma}}\left[\lambda_m(s)\right]^{\frac{1}{\gamma}}\right] e^{-\int_t^S \frac{\gamma-1}{\gamma}\left(-\frac{\beta+\lambda_m(v)}{1-\gamma}+\frac{\alpha^2}{2\gamma\sigma^2}+r+\eta_m(v)\right)dv} ds \end{array} \right\}^{\gamma} \\ B^m(t)=\int_t^T i_m(s)e^{-\int_t^s[r+\eta_m(v)]dv}ds \\ D^m(t)=-\int_t^T e^{-\int_t^s[r+\eta_m(v)-b+a]dv}ds \end{cases}$$

丈夫的最优决策为

$$\begin{cases} c=[A^m(t)-bA^m(t)D^m(t)]^{-\frac{1}{\gamma}}[x+B^m(t)+D^m(t)h]+h \\ p^m=\eta_m(t)\left\{\left[\frac{\eta_m(t)}{\lambda_m(t)}A^m(t)\right]^{-\frac{1}{\gamma}}[x+B^m(t)+D^m(t)h]-x\right\} \\ \pi=\frac{\alpha}{\sigma^2\gamma}[x+B^m(t)+D^m(t)h] \end{cases} \tag{10}$$

证明：同推论 1。

2、共同决策阶段

根据个体决策阶段得到的 HJB 方程，可以得到共同决策阶段的值函数$V^f(t,x,h)$和最优策略$\boldsymbol{u}^*$满足如下方程

$$\begin{cases} sup_{\boldsymbol{u}\in\mathcal{A}}\{U(c-h)+V^f\left(t,x+\frac{p_m}{\eta_m(t)},\omega h\right)\frac{F_f(t,t)}{S(t,t)} \\ +V^m\left(t,x+\frac{p_f}{\eta_f(t)},(1-\omega)h\right)\frac{F_m(t,t)}{S(t,t)}+V_t-\left(\frac{f_{\tau_1}(t)}{S(t,t)}+\beta\right)V \\ +V_x\left[rx+\alpha\pi-c+i_m(t)+i_f(t)-p_m-p_f\right] \\ +\frac{1}{2}V_{xx}\sigma^2\pi^2+V_h[bc-ah]\}=0 \\ V(T,x,h)=U(x) \end{cases} \tag{11}$$

其中$V^f(t,x,h)$和$V^m(t,x,h)$是推论 1 和推论 2 中 HJB 方程的解。

$$\begin{aligned} \boldsymbol{u}^*=argsup_{\boldsymbol{u}\in\mathcal{A}}&\left\{U(c-h)+V^f\left(t,x+\frac{p_m}{\eta_m(t)},\omega h\right)\frac{F_f(t,t)}{S(t,t)}\right. \\ &+V^m\left(t,x+\frac{p_f}{\eta_f(t)},(1-\omega)h\right)\frac{F_m(t,t)}{S(t,t)}+V_t-\left(\frac{f_{\tau_1}(t)}{S(t,t)}+\beta\right)V \\ &\left.+V_x\left[rx+\alpha\pi-c+i_m(t)+i_f(t)-p_m-p_f\right]+\frac{1}{2}V_{xx}\sigma^2\pi^2+V_h[bc-ah]\right\} \end{aligned}$$

因此，最优决策$\{c,\pi,p_m,p_f\}$满足方程组

$$\begin{cases} U^{'}(c-h)=V_x-bV_h \\ \pi=-\frac{\alpha V_x}{V_{xx}\sigma^2} \\ V_x^f\left(t,x+\frac{p_m}{\eta_m(t)},\omega h\right)\frac{F_f(t,t)}{S(t,t)\eta_m(t)}-V_x=0 \\ V_x^m\left(t,x+\frac{p_f}{\eta_f(t)},(1-\omega)h\right)\frac{F_m(t,t)}{\eta_f(t)S(t,t)}-V_x=0 \end{cases}$$

推论 3：值函数$V(t,x,h)=A(t)\frac{[x+B(t)+D(t)h]^{1-\gamma}}{1-\gamma}$是共同决策阶段 HJB 方程的解，其中

$$\begin{cases} A(t)=\left\{e^{\int_t^T k(v)dv}+\int_t^T m(s)e^{\int_t^S k(v)dv}ds\right\}^\gamma \\ D(t)=\int_t^T\left[\eta_m(s)D^f(s)\omega+\eta_f(s)D^m(s)(1-\omega)-1\right]e^{-\int_t^s[r+\eta_m(v)+\eta_f(v)-b+a]dv}ds \\ B(t)=\int_t^T\left[i_m(s)+i_f(s)+\eta_m(s)B^f(s)+\eta_f(s)B^m(s)\right]e^{-\int_t^s[r+\eta_m(v)+\eta_f(v)]dv}ds \end{cases}$$

$m(t)$和$k(t)$满足如下形式

$$k(t)=\frac{1-\gamma}{\gamma}\left(\frac{1}{2}\frac{\alpha^2}{\sigma^2\gamma}-\frac{\frac{f_{\tau_1}(t)}{S(t,t)}+\beta}{1-\gamma}+r+\eta_m(t)+\eta_f(t)\right)$$

$$m(t)=[1-bD(t)]^{\frac{\gamma-1}{\gamma}}+[\eta_m(t)]^{\frac{\gamma-1}{\gamma}}\left[\frac{A^f(t)F_f(t,t)}{S(t,t)}\right]^{\frac{1}{\gamma}}+\left[\eta_f(t)\right]^{\frac{\gamma-1}{\gamma}}\left[\frac{A^m(t)F_m(t,t)}{S(t,t)}\right]^{\frac{1}{\gamma}}$$

夫妻二人在共同决策阶段的最优的投资、消费和寿险决策为

$$\begin{cases}c=[A(t)-bA(t)D(t)]^{-\frac{1}{\gamma}}[x+B(t)+D(t)h]+h\\ \pi=\dfrac{\alpha}{\sigma^2\gamma}[x+B(t)+D(t)h]\\ p_m=\eta_m(t)\left\{\left[\dfrac{A(t)}{A^f(t)}\dfrac{S(t,t)\eta_m(t)}{F_f(t,t)}\right]^{-\frac{1}{\gamma}}[x+B(t)+D(t)h]-\left[x+B^f(t)+D^f(t)\omega h\right]\right\}\\ p_f=\eta_f(t)\left\{\left[\dfrac{A(t)}{A^m(t)}\dfrac{S(t,t)\eta_f(t)}{F_m(t,t)}\right]^{-\frac{1}{\gamma}}[x+B(t)+D(t)h]-[x+B^m(t)+D^m(t)(1-\omega)h]\right\}\end{cases} \tag{12}$$

证明：基本过程同推论 1 证明。

至此，本文得到了在 CRRA 效用函数下各个阶段的最优策略。

解的经济含义

1、可用资本

从求解出的个体最优决策和最优共同决策中可以看到，最优决策也是基于家庭当前的可用资产在不同项目上的分配。定义可用资产为：

$$Y(t)=\begin{cases}X(t)+B(t)+D(t)H(t), & t\in[0,\tau_1)\\ X(t)+B^m(t)+D^m(t)H(t), & t\in\left[\tau_f,\tau_m\right]\\ X(t)+B^f(t)+D^f(t)H(t), & t\in\left[\tau_m,\tau_f\right]\end{cases}$$

可以看到三组最优策略的最优消费，最优寿险支出和最优风险资产投资都是$Y(t)$的线性函数。可用资产$Y(t)$是由在t时刻的财富$(X(t))$，t时刻的人力资本$(B(t)$，$B^m(t)$以及$B^f(t))$和t时刻为了保证未来消费习惯的强制储蓄（$D(t)H(t)$，$D^m(t)H(t)$和$D^f(t)H(t)$）组成的。

（1）人力资本

人力资本是指家庭未来收入的折现，包括个体决策阶段的$B^m(t)$和$B^f(t)$，以及共同决策阶段的$B(t)$。在个体决策阶段，由$B^m(t)$和$B^f(t)$的表达式可以看出，妻子或丈夫的人力资本为个体未来收入折现到t时刻的累计值。例如，当妻子的死亡力为$\eta_f(t)$时，可以看到

$$\begin{aligned}&E\left[\int_t^{\tau_f\wedge T}i_f(s)e^{-r(s-t)}\,ds|\tau_f>t\right]\\ &\quad=\int_t^T\int_t^{t_f}\frac{f_f(t_f)}{S_f(t)}i_f(s)e^{-r(s-t)}ds\,dt_f+\int_T^{+\infty}\int_t^T\frac{f_f(t_f)}{S_f(t)}i_f(s)e^{-r(s-t)}ds\,dt_f\end{aligned}$$

$$=\int_t^T \frac{S_f(s)}{S_f(t)} i_f(s) e^{-r(s-t)}\,ds$$

$$=\int_t^T i_f(s) e^{-\int_t^s \eta_f(v)+r dv}\,ds$$

可以将$B^m(t)$和$B^f(t)$写成如下形式

$$B^f(t)=E\left[\int_t^{\tau_f\wedge T} i_f(s)e^{-r(s-t)}\,ds|\tau_f>t\right]$$

$$B^m(t)=E\left[\int_t^{\tau_m\wedge T} i_m(s)e^{-r(s-t)}\,ds|\tau_m>t\right]$$

同理，在共同决策阶段，家庭的总人力资本也是夫妻双方未来收入的折现。所以，当两个个体的死亡不相关时，可以得到

$$E\left[\int_t^{\tau_2\wedge T}\left[i_m(s)+i_f(s)\right]e^{-r(s-t)}\,ds|\tau_1>t\right]$$

$$=\left[\int_t^T \frac{S_{\tau_1}(s)}{S_{\tau_1}(t)}\left[i_m(s)+i_f(s)\right]e^{-r(s-t)}\,ds+\int_t^T B^m(t_f)e^{-r(t_f-t)}\frac{F_m(t_f,t_f)}{S_{\tau_1}(t)}d\,t_f\right.$$
$$\left.+\int_t^T B^f(t_m)e^{-r(t_m-t)}\frac{F_f(t_m,t_m)}{S_{\tau_1}(t)}d\,t_m\right]$$

按市场寿险费率计算死亡率，可以得到

$$E\left[\int_t^{\tau_2\wedge T}\left[i_m(s)+i_f(s)\right]e^{-r(s-t)}\,ds\right]$$

$$=\left[\int_t^T\left[i_m(s)+i_f(s)+\eta_f(s)B^m(t_f)+\eta_m(s)B^f(t_m)\right]e^{-\int_t^s[r+\eta_m(v)+\eta_f(v)]dv}\,ds\right]$$

因此，$B(t)$可以写成$B(t)=E\left[\int_t^{\tau_2\wedge T}\left[i_m(s)+i_f(s)\right]e^{-r(s-t)}\,ds|\tau_1>t\right]$

（2）未来消费储蓄

本文注意到，$D(t)<0$，$D^m(t)<0$ 以及$D^f(t)<0$。事实上，由于消费习惯的存在，为了保证未来的消费习惯可以被满足，家庭和个人会将一部分资产先储蓄起来，因此这部分资产会被排除在当前的可用资产之外。可以将这部分资产理解为，当未来的消费支出和消费习惯相等时，未来消费支出折现到t时刻的总和。假设在t时刻的消费习惯为h，那么在个体决策阶段，妻子的未来消费储蓄为$D^f(t)h$，丈夫的未来消费储蓄为$D^m(t)h$，在共同决策阶段，家庭的未来消费储蓄为$D(t)h$。

例如，在个体决策阶段，如果在t时刻，丈夫已经死亡，此时消费习惯为h，若妻子在未来s时刻（$s>t$）的消费支出$c(s)$和消费习惯$H(s)$相等，有$dH(s)=(b-a)H(s)ds$，$H(t)=h$，$c(s)=H(s)=he^{(b-a)(s-t)}$。当采用无风险利率$r$对未来消费支出进行折现，并用市场寿险费率来衡量个体的死亡力时，可以得到

$$E\left[\int_t^{\tau_f\wedge T} c(s)e^{-r(s-t)}\,ds|\tau_f>t\right]=h\int_t^T e^{-\int_t^s[r+\eta_m(v)-b+a]dv}ds$$

所以，可以将$D^f(t)h$和$D^m(t)h$写为

$$D^f(t)h=-E\left[\int_t^{\tau_f\wedge T} c(s)e^{-r(s-t)}\,ds|\tau_f>t\right]$$

$$D^m(t)h=-E\left[\int_t^{\tau_m\wedge T} c(s)e^{-r(s-t)}\,ds|\tau_m>t\right]$$

对于共同决策阶段，在$[t,\tau_1)$上，家庭的总消费为$c(s)=H(s)=he^{(b-a)(s-t)}$.

当丈夫死亡，妻子的消费习惯会降低到家庭总消费习惯的ω倍，即在$\left[\tau_m,\tau_f\right]$时间段内，妻子的消费和消费习惯为$c(s)=H(s)=\omega h e^{(b-a)(s-t)}$。当妻子死亡，丈夫的消费习惯会降低到家庭总消费习惯的$1-\omega$倍，即在$\left[\tau_f,\tau_m\right]$时间段内，丈夫的消费和消费习惯为$c(s)=H(s)=(1-\omega)he^{(b-a)(s-t)}$。如果采用无风险利率$r$对未来消费支出进行折现，并用市场寿险费率来衡量个体的死亡力，假设个体死亡时间不相关，可以得到

$$
\begin{aligned}
&E\left[\int_t^{\tau_2\wedge T} c(s)e^{-r(s-t)}\,ds|\tau_1>t\right]\\
&=hE\left[\int_t^T e^{-\int_t^s\left[r+\eta_m(v)+\eta_f(v)-b+a\right]dv}\,ds-\int_t^T \eta_m(s)D^f(s)\omega e^{-\int_t^s\left[r+\eta_m(v)+\eta_f(v)-b+a\right]dv}\,ds\right.\\
&\qquad\left.-\int_t^T \eta_f(s)D^m(s)(1-\omega)e^{-\int_t^s\left[r+\eta_m(v)+\eta_f(v)-b+a\right]dv}\,ds\right]
\end{aligned}
$$

所以$D(t)h$可以写为$D(t)h=-\,E\left[\int_t^{\tau_2\wedge T} c(s)e^{-r(s-t)}\,ds|\tau_1>t\right]$。

因此可用资产为当前财富加上人力资本再减去为未来消费所作的储蓄。在最优策略下，虽然无法保证家庭的财富为正，但是本文有$Y(t)>0$。

当$t\in[0,\tau_1)$时，对$Y(t)$微分可得

$$
\begin{aligned}
dY(t)&=d[X(t)+B(t)+D(t)H(t)]\\
&=\left\{\left[\left[r+\eta_m(t)+\eta_f(t)\right]+\frac{\alpha^2}{\sigma^2\gamma}-A(t)^{-\frac{1}{\gamma}}[1-bD(t)]^{1-\frac{1}{\gamma}}\right.\right.\\
&\qquad\left.-\eta_m(t)\left[\frac{A(t)}{A^f(t)}\frac{S(t,t)\eta_m(t)}{F_f(t,t)}\right]^{-\frac{1}{\gamma}}-\eta_f(t)\left[\frac{A(t)}{A^m(t)}\frac{S(t,t)\eta_f(t)}{F_m(t,t)}\right]^{-\frac{1}{\gamma}}\right]dt\\
&\qquad\left.+\frac{\alpha}{\sigma\gamma}dB(t)\right\}Y(t)
\end{aligned}
$$

当$t\in\left[\tau_m,\tau_f\right]$时，对$Y(t)$微分可得

$$
\begin{aligned}
dY(t)&=d\left[X(t)+B^f(t)+D^f(t)H(t)\right]\\
&=\left\{\left[\left[r+\eta_f(t)\right]+\frac{\alpha^2}{\sigma^2\gamma}-A^f(t)^{-\frac{1}{\gamma}}\left[1-bD^f(t)\right]^{1-\frac{1}{\gamma}}-\eta_f(t)\left[\frac{\eta_f(t)}{\lambda_f(t)}A^f(t)\right]^{-\frac{1}{\gamma}}\right]dt\right.\\
&\qquad\left.+\frac{\alpha}{\sigma\gamma}dB(t)\right\}Y(t)
\end{aligned}
$$

同理，当$t\in\left[\tau_f,\tau_m\right]$时，对$Y(t)$微分可得

$$
\begin{aligned}
dY(t)=&\left\{\left[\left[r+\eta_m(t)\right]+\frac{\alpha^2}{\sigma^2\gamma}-A^m(t)^{-\frac{1}{\gamma}}\left[1-bD^m(t)\right]^{1-\frac{1}{\gamma}}\right.\right.\\
&\qquad\left.\left.-\eta_m(t)\left[\frac{\eta_m(t)}{\lambda_m(t)}A^m(t)\right]^{-\frac{1}{\gamma}}\right]dt+\frac{\alpha}{\sigma\gamma}dB(t)\right\}Y(t)
\end{aligned}
$$

因此，只要$Y(0)>0$，就会有$Y(t)>0$。

2、最优消费决策

本文发现无论是在个体决策阶段还是在共同决策阶段，最优消费的形式都十分类似，都是当前可用资产的比例再加上当前消费习惯。由于$Y(t)>0$，$A^f(t)>0$，$A^m(t)>0$，$A(t)>0$，

$D^f(t) \le 0$，$D^m(t) \le 0$，$D(t) \le 0$，所以无论是在哪个阶段，都有$c(t) > H(t)$。

在没有消费习惯的情况下，消费支出只需大于 0，而当考虑了消费习惯之后，最优消费支出有了一个随时间变动的下限。如果在消费习惯模型的参数中，有$a > b$，那么在$[0, \tau_1)$和(τ_1, τ_2)时间段上，由于$c(t) > H(t)$，有$dH(t) > 0$，故消费习惯随时间不断增大，除了在家庭成员死亡时会有突然的下降。

事实上，引入消费习惯之后，家庭并非直接选择总消费支出，而是先决定超额消费$c(t) - H(t)$，然后再加上当前的消费习惯作为总消费。超额消费是可用资产的一部分，其占可用资产的比例也会受到消费习惯的影响，即消费习惯的参数也会影响到$[A^f(t)]^{-\frac{1}{\gamma}}$，$[A^m(t)]^{-\frac{1}{\gamma}}$和$[A(t)]^{-\frac{1}{\gamma}}$的大小。当$\gamma > 1$ 时，存在消费习惯使$A^f(t)$，$A^m(t)$和$A(t)$比没有消费习惯的时候大；当 $0 < \gamma < 1$ 时，存在消费习惯会使$A^f(t), A^m(t)$和$A(t)$比没有消费习惯的时候小。

联合生命模型对个体决策阶段的消费没有影响；而对于共同决策阶段，联合生命模型影响了$A(t)$的大小，从而影响了家庭的最优消费。从财富和收入对最优消费的影响而言，由于$[A^f(t) - bA^f(t)D^f(t)]^{-\frac{1}{\gamma}} > 0$，$[A^m(t) - bA^m(t)D^m(t)]^{-\frac{1}{\gamma}} > 0$ 和$[A(t) - bA(t)D(t)]^{-\frac{1}{\gamma}} > 0$，所以消费支出会随着家庭财富和收入的增加而增加。

3、最优寿险决策

在个体决策阶段，问题退化为个人的投资、消费和寿险决策问题，因此最优寿险决策与Richard[3]文章中的最优决策类似，主要差异来源于消费习惯导致可用资本和可用资本分配到遗产上的比例的变化。

个体购买寿险的主要目的是为了留下遗产，也将可用资产的一部分分配到遗产上。从妻子的最优寿险决策来看，t时刻支出的保费使得她如果在t时刻死亡，留下的遗产为$\left[\frac{\eta_f(t)}{\lambda_f(t)}A^f(t)\right]^{-\frac{1}{\gamma}}[x + B^f(t) + D^f(t)h]$。由于$A^f(t) > 0$，$D^f(t) < 0$，所以家庭的财富和收入越高，留下的遗产就越多，保费支出随收入的增加而增加。遗产随着$\eta_f(t)$的增加而减少，随着$\lambda_f(t)$的增加而增加，即寿险产品的价格越高，遗产越少，个体的死亡力越大，遗产越多。

引入消费习惯后，发现家庭的消费习惯越大，留下的遗产越少；消费习惯的增加导致保费支出减少，消费水平的提高会挤压未来的保费支出。因为$\frac{\eta_f(t)}{\lambda_f(t)} \ge 1$，若$A^f(t) \ge 1$，则$\left[\frac{\eta_f(t)}{\lambda_f(t)}A^f(t)\right]^{-\frac{1}{\gamma}} \le 1$，则当财富增加时，虽然留下的遗产是增加的，但是保费支出反而下降。同时，如果死亡力增加，保费支出增加，如果$\gamma > 1$，市场寿险费率增加，保费支出也会增加，如果 $0 < \gamma < 1$，市场寿险费率增加，保费支出减少。丈夫的最优寿险支出也有同样的效应。

在共同决策阶段，购买寿险是为了给另一半留下足够的生活费用。从丈夫的寿险支出(11)中可以看到，当丈夫死亡时，有

$$
\begin{aligned}
&X(\tau_{m-}) + \frac{p_m(\tau_{m-})}{\eta_m(\tau_{m-})} + B^f(\tau_{m-}) + D^f(\tau_{m-})\omega H(\tau_{m-}) \\
&\quad = X(\tau_m) + B^f(\tau_m) + D^f(\tau_m)H(\tau_m) \\
&\quad = \left[\frac{A(\tau_{m-})}{A^f(\tau_{m-})}\frac{S(\tau_{m-}, \tau_{m-})\eta_m(\tau_{m-})}{F_f(\tau_{m-}, \tau_{m-})}\right]^{-\frac{1}{\gamma}}[X(\tau_{m-}) + B(\tau_{m-}) + D(\tau_{m-})H(\tau_{m-})] \ge 0
\end{aligned}
$$

其中$X(\tau_m) + B^f(\tau_m) + D^f(\tau_m)H(\tau_m)$是在丈夫死亡后，妻子保持未来的消费和消费习惯相等，未来的收入和消费支出的折现以及丈夫遗留下的所有财富的总和，相当于丈夫为妻子留下的未来生活保障。对于妻子而言，她购买的寿险份额，也是为了给丈夫留下未来的生活保障。从$p_m(t)$和$p_f(t)$的表达式中可以看到，在其他条件一致的情况下，收入水平较高的一方购买的寿险也会较多。事实上，购买寿险是为了预防死亡导致的失去未来收入的风险，因

此收入越多的一方就会买更多的寿险来对冲这一风险。

4、最优投资决策

无论是在个体决策还是共同决策阶段，最优风险投资都是可用资产的一个固定比例，这个比例与风险资产的超额收益率成正比，与风险资产波动率的平方以及家庭的风险厌恶系数成反比。

从$\pi(t)$的表达式可以看到，风险投资会随着家庭财富和人力资本的增加而增加，随着消费习惯的增加而减小，因此消费习惯的存在使得家庭的投资行为变得更加保守。引入消费习惯并不改变可用资产用于投资的比例，但是会降低可用资产，减少个体的投资支出。因为个体会将部分资产储蓄来保障未来的消费，意味着有消费习惯的个体投资决策会变得保守。

数值模拟

上文得到了在 CRRA 效用函数下个体决策阶段和共同决策阶段最优决策的解析解，下文将利用中国的数据通过数值模拟分析一些参数对最优策略的影响。

1、参数设置

本文预计在延迟退休的情况下，未来的退休年龄将达到 65 岁，因此在下文的分析中，考虑一个由 25 岁男性和 25 岁女性组成的家庭，在他们 25 岁到 65 岁之间的最优投资、消费和寿险决策，因此$T=40$。本文参考景珮和李秀芳[26] 中对参数的选取方法来选取所需参数。

（1）无风险资产收益率：采用 2020 年全年的一年期国债收益率②的均值，根据历史数据计算得到$r=0.025200$。

（2）风险资产收益率：常见可投资的风险资产有债券、基金、股票，其中股票是二级市场上最活跃的风险资产，因此采用2020年沪深300指数③的年收益率表示风险资产收益率，根据历史数据计算有$\mu=0.272106$，所以$\alpha=\mu-r=0.272106-0.025200=0.246906$。

（3）风险资产波动率：采用 2020 年沪深 300 指数的收益率的年化波动率表示风险资产波动率，计算得到$\sigma=2.204558$。

（4）死亡力：假设被保险人在$x\sim x+1$岁之间的死亡力为常数，值为$\lambda_x=-\ln(p_x)$。根据保险公司定期寿险定价时所采用的中国人身保险业经验生命表(2010-2013)非养老类业务一表④25 岁到 65 岁之间的死亡率，计算男性和女性在 25 岁到 65 岁之间的死亡力。发现 25 岁到 65 岁之间的死亡力的散点图接近时间的二次函数，采用 OLS 估计法拟合得到男性和女性的死亡力函数为

$$\lambda_m(t)=0.01388-0.000809t+0.000012378t^2$$
$$\lambda_f(t)=0.00826-0.000472t+0.000006921t^2$$

（5）联合生命模型：假设夫妻双方寿命的相依性用 Clayton Copula 来模拟，即

$$C(u,v)=(u^{-\rho}+v^{-\rho}-1)^{-1/\rho},\qquad \rho>0$$

由于国内尚缺乏联合生命的相关数据，因此难以采用国内数据测量参数ρ，故在此采用 Luciano[27]中的参数，设置$\rho=2.23$。进而通过联合生命模型中的式（1）和（2），计算得到

$$F_m(t,t)=\left[S_m^{-\rho}(t)+S_f^{-\rho}(t)\right]^{-1/\rho-1}S_f^{-\rho}(t)\lambda_f(t)$$

$$F_f(t,t)=\left[S_m^{-\rho}(t)+S_f^{-\rho}(t)\right]^{-1/\rho-1}S_m^{-\rho}(t)\lambda_m(t)$$

（6）寿险费率：假设保险公司不收取附加费用，即$\eta_m(t)=\lambda_m(t)$，$\eta_f(t)=\lambda_f(t)$。

② 数据来源：http://www.shibor.org/shibor/web/DataService.jsp
③ 数据来源：https://cn.investing.com/rates-bonds/china-1-year-bond-yield-historical-data
④ 数据来源：http://bxjg.circ.gov.cn/web/site0/tab5216/info4054990.htm

（7）工资：采用 2020 年全国城镇单位就业人员平均工资作为基础工资，工资年增长率采用 2020 年通货膨胀率⑤，因此本文假设$i_m(t) = i_f(t) = 97379e^{0.075t}$。

（8）初始财富：根据冯蕾和梁治安[25]，初始财富设置为基础工资的 4 倍，因此按比例设置$X(0) = 389516$。

（9）时间贴现因子：根据李纯青和徐寅峰[28]，采用固定的时间贴现因子$\beta = 0.1085$。

（10）风险厌恶系数：根据 Constantinide[29]，设置$\gamma = 2.2$。

（11）消费习惯参数：根据 Constantinide[29]本文设置消费习惯的参数为$a = 0.1$，$b = 0.093$。对于初始消费习惯的选取，根据熊和平[30]，设置$H(0) = 0.11X(0)$。同时假设夫妻双方在家庭消费习惯中的占比相同，即$\omega = 0.5$。

2、最优投资、消费和寿险策略

本文首先在上述参数设置下，考虑夫妻双方都存活到 65 岁，丈夫先于妻子死亡和妻子先于丈夫死亡这三种情况下家庭的最优投资、消费和寿险决策。

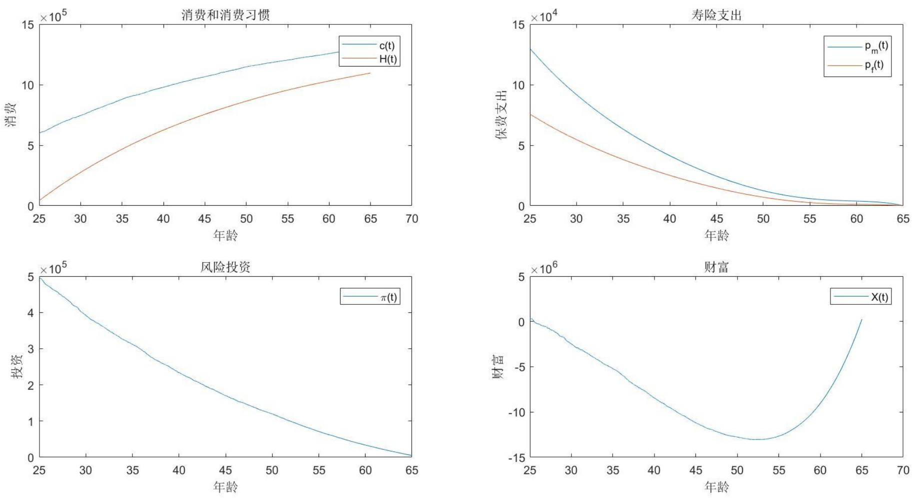

图 1 夫妻双方都存活到 65 岁

图 1 给出了夫妻双方都存活到 65 岁的情况下，整个家庭 40 年内最优投资、消费和寿险支出随时间的变化。由于在T时刻前夫妻二人都生存，因此整个时间段都是共同决策阶段。可以看到，家庭的消费支出和消费习惯都随时间不断增加，并且消费支出始终大于消费习惯。但是两者的差异即超额消费在不断减少。

本文在参数设置中给定了夫妻双方的收入水平一致，由于女性的死亡率通常要低于男性，因此妻子对寿险的需求要低于丈夫对寿险的需求。因为风险资产的投资是可用资产的常数倍，因此风险资产的投资头寸在一定程度上也反映了可用资产随时间变化的情况。可以看到，可用资产和风险投资的头寸都随时间不断减少。

家庭的财富先是随着时间下降，而后上升，由于早期收入较少，家庭需要通过贷款来建设新的家庭，因此前期财富下降。而后期有了一定的储蓄以及收入水平的上升，开始偿还贷款，财富开始上升。在个体的决策中，由于前期的负债较多，个体在前期需要通过购买更多的寿险来保证留下的遗产为正，因此个体的寿险支出有先升后降的趋势。在图 1 中可以看到夫妻二人购买的寿险份额都随时间下降，因为夫妻双方在一方死亡的情况下，另一方依然需要继续偿还贷款。

图 2 给出了丈夫先于妻子死亡的情况。可以看到，消费支出一直大于消费习惯，在 45 岁之前一直随时间上升，45 岁时，由于丈夫死亡，消费先突然下降，之后又上升。寿险支出也随时间不断下降。在 45 岁前，由于男性的死亡力大于女性，所以丈夫的寿险支出大于

⑤ 数据来源：http://data.stats.gov.cn/

妻子的。在丈夫死亡时，保险金的给付使得家庭财富突然增加。在 45-65 岁之间，妻子的寿险支出也出现突然下降，随后不断下降直到趋于 0。由于可用资产随着时间不断下降，所以风险投资也不断下降，在丈夫死亡之后，可用资产突然下降，因此丈夫购买的寿险并未完全对冲未来的收入损失风险。在图 1 中可以看到，家庭财富在 50 岁之后才有上升的趋势，因此在共同决策阶段，家庭财富一直下降。丈夫死亡后，妻子用保险金偿还部分贷款。随后进入个体决策阶段，家庭财富依旧是先下降后上升的趋势。

图 3 给出了妻子先于丈夫死亡的情况。同样假设妻子在 45 岁时死亡，因此 45 岁之前是共同决策阶段，45 岁后是丈夫的个体决策阶段。图 3 和图 2 基本相似，最大的区别在于当妻子死亡后，妻子的寿险支出为 0，丈夫的寿险支出突然下降，但是在整个时间段上，都有 $p_m(t) > p_f(t)$。

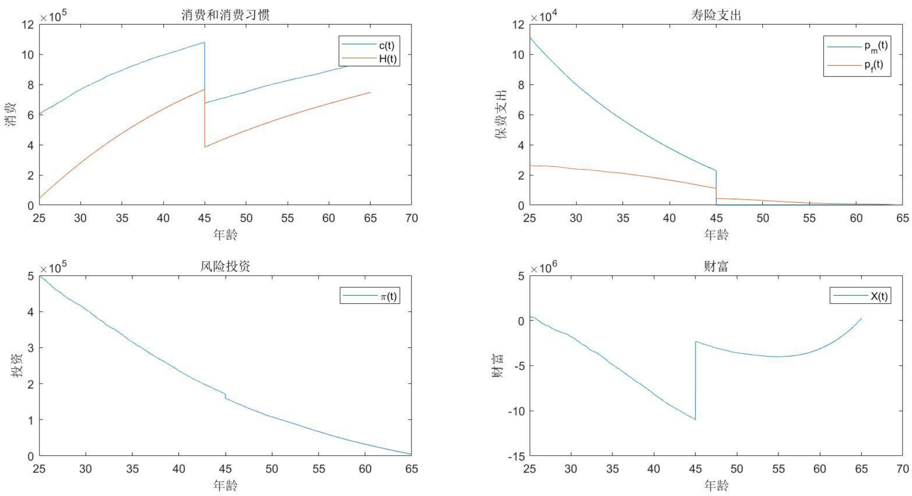

图 2 丈夫先于妻子死亡

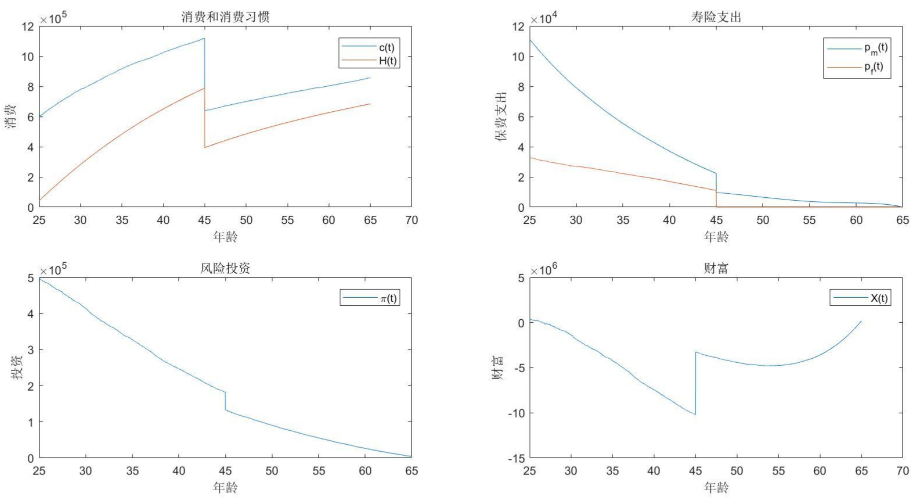

图 3 妻子先于丈夫死亡

3、消费习惯对最优策略的影响

由于个体决策阶段本质上是简单的个人带消费习惯的最优投资、消费和寿险决策问题，因此在下文中只考虑夫妻双方都生存的共同决策阶段，分析消费习惯对共同决策阶段的最优家庭投资、消费和寿险决策的影响。

（1）消费习惯大小对最优策略的影响

首先，本文设置参数$a = b$来讨论消费习惯高低对最优决策的影响。当$a = b$时，家庭会

将超额消费的一定比例加入到消费习惯中，从而不断提升最低消费标准，故而a,b越大时，家庭形成消费习惯的倾向越大，消费习惯越高。本文考虑四种情况，分别为无消费习惯、低消费习惯中等消费习惯和高消费习惯下的最优策略，其参数设置如表 1 所示。

表 1　不同消费习惯大小下的参数假设

无消费习惯	低消费习惯	中等消费习惯	高消费习惯
$a=b=0$	$a=b=0.1$	$a=b=0.3$	$a=b=0.5$

图 4 给出了四组不同消费习惯大小的参数下对应的最优消费支出和消费习惯的对比。可以看到，当不存在消费习惯时，家庭的最优消费支出随时间下降。当存在消费习惯时，最优的消费支出$c(t)$一直大于消费习惯$H(t)$，由于参数设置$a=b$，因此消费习惯$H(t)$一直随时间上升，故而消费支出也随着消费习惯不断增加。其次随着a,b的不断上升，$c(t)$和$H(t)$之间的差距在不断的缩小，说明如果家庭形成消费习惯的倾向越大，那么进行超额消费的能力就越小。

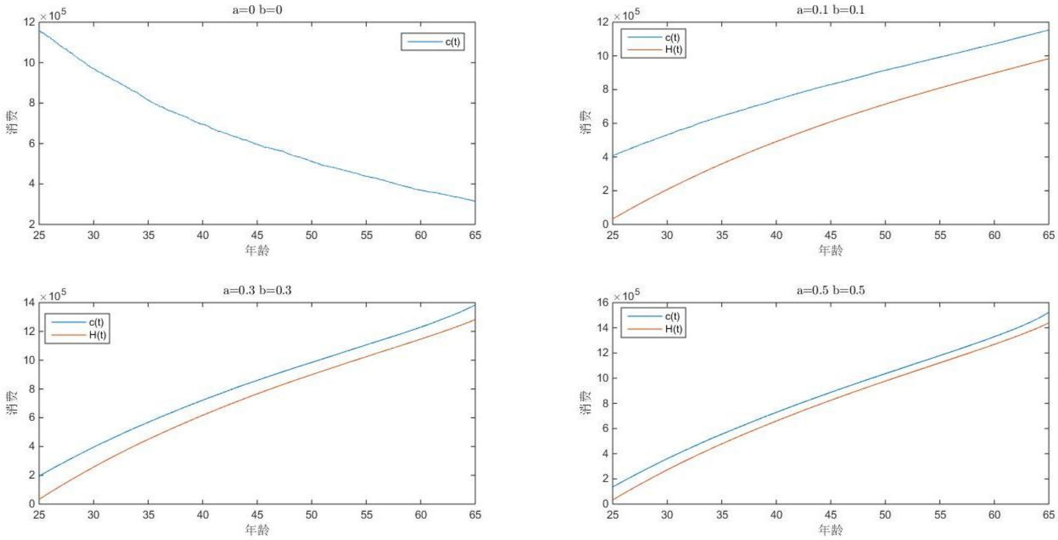

图 4 不同消费习惯大小下的消费支出和消费习惯

从图 5 可以看到在不同消费习惯大小下的最优策略变化。随着消费习惯不断增大，消费支出前期减小，后期增加。因此，当消费习惯越大时，个体在前期就会就会进行更多的储蓄，用于未来消费。

从丈夫和妻子购买寿险的支出随a,b的变化可以看出，消费习惯挤压了寿险支出，随着a,b的增大，丈夫和妻子的寿险支出都减少了，家庭会选择将更多的财富储蓄留到未来进行消费。在不同a,b的值下，观察最优风险投资的变化，由于风险投资是可用资产的固定比例，因此风险投资的变化在一定程度上也反映了可用资产的变化。消费习惯越大，家庭的未来消费储蓄就会越多，可用资产就会越少，故而可用资产的大小随着消费习惯的增加而减少。可以看到，消费习惯越大的家庭，风险投资越小，由于家庭会通过更多的储蓄来保证未来的生活水平在消费习惯之上，因此消费习惯使得家庭的投资决策更加谨慎。

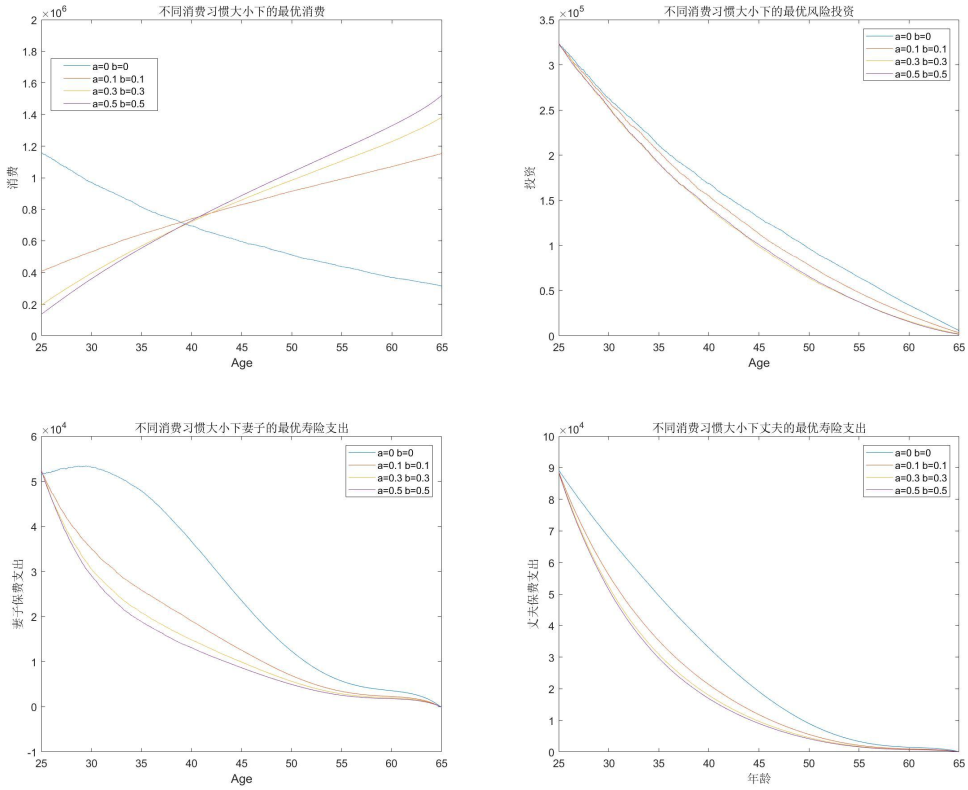

图 5 不同消费习惯大小下的最优策略

（2）消费习惯模式对最优策略的影响

在对消费习惯假设的讨论中，假设参数a用于衡量家庭对过去消费的遗忘程度，参数b度量家庭对过去消费的依赖程度。因此，如果家庭对过去消费的遗忘程度高，依赖程度低，则表明家庭对新的生活模式的适应性高。本文设置$a > b$，$a = b$以及$a < b$三种情况讨论消费习惯的模式对家庭最优决策的影响，具体的参数设置如表 2。

表 2　不同消费习惯模式下的参数假设

$a > b$	$a = b$	$a < b$
$a = 0.2, b = 0.1$	$a = b = 0.15$	$a = 0.1, b = 0.2$

Constantinide[29]提出，消费习惯使得个体的消费水平变得平滑，在其他的一些文献中也提到了消费习惯可以使得个体的最优消费水平比 Merton[1]中得到的更加平滑。而在本文的数值模拟中发现，消费水平是否平滑与消费模式息息相关，图 6 描述了不同消费习惯模式下的最优消费，由于，所以根据(3)式，当$a = b$和$a < b$时，有$dH(t) > 0$，故而消费习惯一定会逐期递增，因而最优消费也会随着逐期递增。当$a = b$时，根据图 6，可知消费水平不一定会比无消费习惯的情况下平滑，甚至当$a = b$足够大时，最优的消费支出路径十分陡峭。当$a < b$时，消费习惯递增的速度更快，个体在前期消费水平极低，而后期消费水平极高，更不会表现出消费平滑的现象。只有在$a > b$的情况下，$H(t)$不会持续上升，最优消费先上升，后下降，且前后期差异较小，更有可能出现最优消费在整个时间区间内平滑的情况。因此适应能力好的家庭，可以很好的调节自己的消费，使自己的消费始终保持在一个合理的水平上。

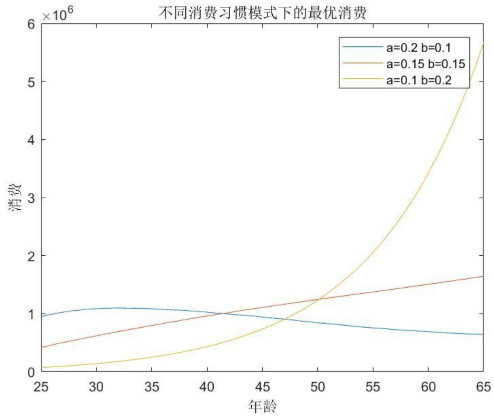

图 6 不同消费习惯模式下的最优消费

图 7 显示了不同消费模式下的家庭最优策略。可以发现，对于夫妻二人的寿险支出和风险投资而言，本文依旧有消费习惯越大，寿险支出越少，风险投资越少。在$a = b$和$a < b$的情况下，由于消费习惯不断增加导致消费不断上升，挤压了寿险支出，并且由于高消费习惯导致储蓄增加使得风险投资头寸下降。而对于适应性强的家庭，即在$a > b$的情况下，家庭不需要那么多的未来消费储蓄，因此可以有更多的可用资产用于购买寿险，并进行风险投资。

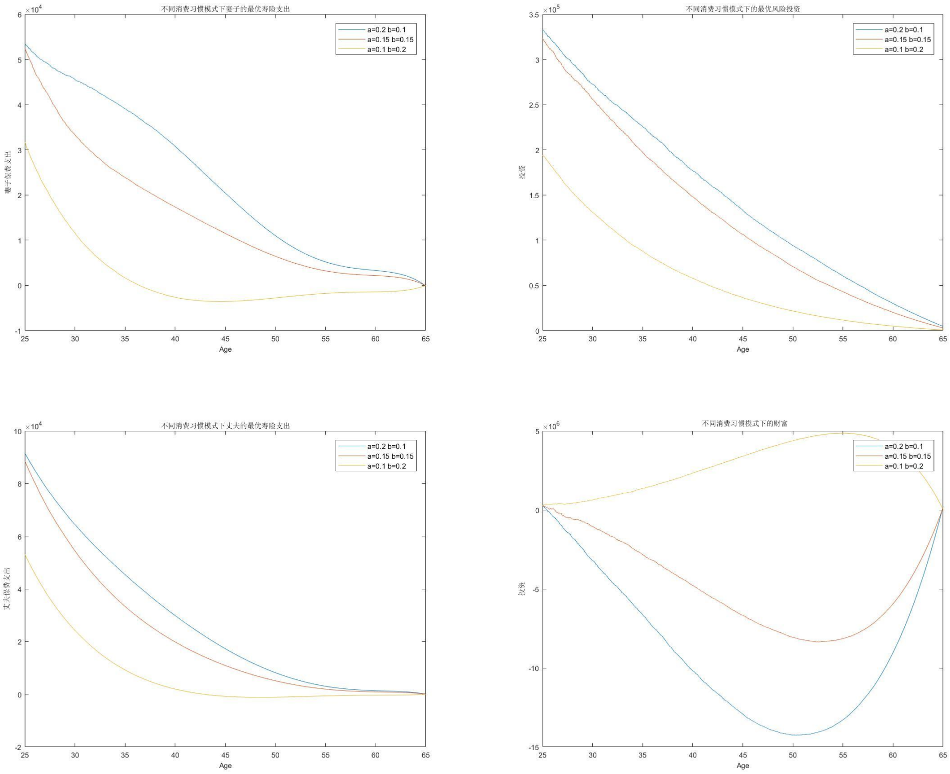

图 7 不同消费习惯模式下的最优策略

结论

本文将消费习惯引入到家庭的最优投资、消费和寿险决策问题中，考虑一个由夫妻二人组成的家庭在$[0, T]$时间段上的决策，家庭的效用来源于超额消费、遗产效用和在T时刻生存

的财富效用三个部分。本文将问题分为两阶段，即夫妻都生存的共同决策阶段和有一人死亡后的个体决策阶段，并在CRRA效用函数下，求解出了两个阶段最优策略的显示解，进行了分析。虽然已有学者研究家庭的最优决策问题，但是本文的创新之处在于引入了消费习惯，而且考虑了家庭成员寿命之间的相关性，使得模型更加符合实际，并通过中国的数据实证分析了家庭的消费习惯对于最优投资、消费和寿险决策的影响。

通过对得到的解析解进行分析，发现最优的投资、消费和寿险决策都是可用资产的函数，可用资产由t时刻的财富，人力资本以及未来消费保障组成。在引入消费习惯后，消费支出有了一个随时间变动的下界。在个体决策阶段，最优寿险支出随保费增加而减少，随死亡率增加而增加。而共同决策阶段，收入越多的一方，购买的寿险越多。消费习惯的存在使得家庭预留更多的储蓄来保障未来的消费，故最优的风险投资减少。

本文使用国内金融和保险市场的数据进行数值模拟，发现家庭形成消费习惯的倾向越大，进行超额消费的能力越小；随着消费习惯的上升，消费支出前期减少后期增加，曲线越来越陡峭；同时，消费习惯的增加导致了寿险支出和风险投资的减少，印证了本文从解析解中得到的结论。随后讨论了消费习惯模式带来的影响，随着a增大，b减小，家庭对新环境的适应性越好，消费支出越平滑。

参考文献：

[1] Merton R C. Lifetime Portfolio Selection Under Uncertainty: The Continuous-time Case[J].The Review of Economics and Statistic, 1969, 51(3):247-257

[2] Yarri M E. Uncertain Lifetime, Life Insurance, and The Theory of the Consumer[J], The Review of Economic Studies, 1965, 32(2): 137--150

[3] Richard S F. Optimal Consumption, Portfolio and Life Insurance Rules For an Uncertain Lived Individual In A Continuous Time Model[J],Journal of Financial Economics., 1975, 32(2): 187--203

[4] Hougaard P .Analysis of Multivariate Survival Data[M], New York: Springer,2012:1-35

[5] Jevtic P and Hurd T R. The Joint Mortality of Couples In Continuous Time[J]. Insurance: Mathematics and Economics, 2017,75:90-97

[6] Hong J H and Ríos-Rull J V. Life Insurance and Household Consumption[J]. American Economic Review, 2009, 102(7):3701-3730

[7] 李秀芳,王丽珍.家庭消费、保险、投资策略研究[J]. 消费经济, 2011, 4:85-88

[8] Hubener A, Maurer R and Mitchell O. How Family Status and Social Security Claiming Options Shape Optimal Life Cycle Portfolios[J]. Review of Financial Studies, 2016, 29(4):937-978

[9] Bruhn K and Steffensen M. Household Consumption Investment and Life Insurance[J]. Insurance: Mathematics and Economics, 2011, 48:315-325

[10] Kwak M , Shin Y and Choi U. Optimal Investment and Consumption Decision of A Family with Life Insurance[J]. Insurance: Mathematics and Economics, 2011, 48:176-188

[11] Wei J , Cheng X , Jin Z , et al. Optimal Consumption ‑ investment and Life-insurance Purchase Strategy for Couples with Correlated Lifetimes[J].Insurance Mathematics and Economics, 2020, 91:244-256

[12] Camobell J and Deaton A. Why Is Consumption So Smooth?[J]. The Review of Economic Studies, 1989, 56(3): 357-373

[13] Lally P,Jaarsveld C H M V , Potts H W W and Wardle J. How Are Habits Formed: Modelling Habit Formation In the Real World[J]. European Journal of Social Psychology, 2010, 40 (6): 998-1009

[14] Hicks J. Capital and Growth[J]. New York Journal of Applied Econometrics, 1965, 28(4):527-550

[15] Abel A . Asset Prices Under Habit Formation and Catching Up With The Joneses[J]. American Economic Review, 1990, 80:38-42

[16] Detemple J B and Zapatero F. Optimal Consumption-portfolio Policies With Habit Formation[J]. Math. Finance, 1992, 2:251–274.
[17] Detemple J B and Karatzas I. Non-addictive Habits: Optimal Consumption Portfolio Policies[J]. Econom. Theory, 2003, 113:265–285
[18] Browning M and Collado M D. Habits and Heterogeneity in Demands: A Panel Data Analysis[J]. Journal of Applied Econometrics, 2007, 22(3):625-640
[19] Fuhrer J C. Habit Formation in Consumption and Its Implications for Monetary-Policy Models[J]. American Economic Review, 2000, 90(3):367-390
[20] Jong F D and Zhou Y. Portfolio and Consumption Choice with Habit Formation Under Inflation[J]. SSRN Electronic Journal, 2013
[21] 冯蕾,梁治安.消费习惯、退休养老计划与最优消费[J]. 现代经济讨论, 2015, 50(6):1257-1291
[22] 龙志和, 王晓辉, 孙艳. 中国城镇居民消费习惯形成实证分析[J]. 经济科学, 2002(06):29-35
[23] 刘敬真,林荔圆,孟辉.带消费习惯的最优消费,寿险和投资决策[J]. 应用数学学报,2020(3):517-534
[24] Karatzas I. Brownian motion and stochastic calculus[D]. New York: Springer, 1991
[25] Yong J M. and Zhou X Y . Stochastic Controls[M]. 世界图书出版公司, 2012.
[26] 景珮,李秀芳.基于连续时间金融理论人寿保险需求问题探究[J]. 南开经济研究, 2013, 1:91-103
[27] Luciano E, Spreeuw J, Vigna E. Modelling Stochastic Mortality for Dependent Lives[J]. Insurance: Mathematics and Economics, 2008, 43:234-244
[28] 李纯青,徐寅峰.动态消费者选择模型及贴现因子的确定[J]. 管理科学学报, 2005, 8(3):50-55
[29] Constantinides G M. Habit Formation: A Resolution of The Equity Premium Puzzle[J].The Journal of Political Economy, 1990, 98(3):519-543
[30] 熊和平,李淑懿,余均.消费习惯、异质偏好与资产定价[J]. 管理科学学报, 2012, 15(9):65-73

Optimal Asset Allocation For Households With Habit Formation

Liu Jingzhen[1], Yan Shiqi[1] and Lin Liyuan[1]
(1.The China Institute for Actuarial Science, Central University of Finance and Economics, Beijing 100086)

Abstract: Recently, the asset allocation of a family is one of the hot topics. This paper introduces the habit formation into the optimal investment, consumption and life insurance decision of a family composed of a husband and wife in the time period $[0, T]$. The original problem is divided into the optimization problem of joint decision stage and individual decision stage. The Halmiton-Jacob-Bellman equations and the value functions are solved by dynamic programming method for the two stages respectively. And the analytic solutions of optimal strategy are obtained under the form of CRRA utility function. In addition, using the data from China, the numerical simulation is conducted and the influence of habit formation on the optimal strategy is analyzed. It is found that the optimal consumption expenditures increase with time in the case with habit formation. The excess consumption decreases with the increase of habit formation. And the increase of habit formation will squeeze life insurance expenditures and increase household saving rate, leading to the decrease of risk investment and household life insurance expenditures. The less dependent households are on past consumption, the smoother their consumption expenditures.

Key Words: Habit formation， Dynamic programming， Optimal insurance， Optimal investment and consumption

附录

1、附录 1

根据$V^f(t,x,h)$和$V^m(t,x,h)$的定义，有

$$
\begin{aligned}
&V^f\big(\tau_m, X(\tau_m), H(\tau_m)\big)\\
&\quad = \max_{\boldsymbol{u}_f\in\mathcal{A}_f} E_{\tau_m,X(\tau_m),H(\tau_m)}\Bigg[\int_{\tau_m}^{\tau_f\wedge T} U\big(c(s)-H(s)\big)e^{-\beta(s-\tau_m)}ds\\
&\qquad + U\left(X(\tau_f)+\frac{p_f(\tau_f)}{\eta_f(\tau_f)}\right)e^{-\beta(\tau_f-\tau_m)}I_{\{\tau_f\le T\}}\\
&\qquad + U\big(X(T)\big)e^{-\beta(T-\tau_m)}I_{\{T<\tau_f\}}|\tau_f>\tau_m\Bigg],
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&V^m\left(\tau_f, X(\tau_f), H(\tau_f)\right)\\
&\quad = \max_{\boldsymbol{u}_m\in\mathcal{A}_m} E_{\tau_f,X(\tau_f),H(\tau_f)}\Bigg[\int_{\tau_f}^{\tau_m\wedge T} U\big(c(s)-H(s)\big)e^{-\beta(s-\tau_f)}ds\\
&\qquad + U\left(X(\tau_m)+\frac{p_m(\tau_m)}{\eta_m(\tau_m)}\right)e^{-\beta(\tau_m-\tau_f)}I_{\{\tau_m\le T\}} + U\big(X(T)\big)e^{-\beta(T-\tau_f)}I_{\{T<\tau_m\}}|\tau_m\\
&\qquad > \tau_f\Bigg].
\end{aligned}
$$

故

$$
\begin{aligned}
&= \max_{\boldsymbol{u}\in\mathcal{A},\boldsymbol{u}_f\in\mathcal{A}_f,\boldsymbol{u}_m\in\mathcal{A}_m} E\Bigg[\int_0^{\tau_1\wedge T} U\big(c(t)-H(t)\big)e^{-\beta t}dt + \int_{\tau_1\wedge T}^{\tau_2\wedge T} U\big(c(t)-H(t)\big)e^{-\beta t}dt\\
&\qquad + U\left(X(\tau_m)+\frac{p_m(\tau_m)}{\eta_m(\tau_m)}\right)e^{-\beta\tau_m}I_{\{\tau_f\le\tau_m\le T\}} + U\left(X(\tau_f)+\frac{p_f(\tau_f)}{\eta_f(\tau_f)}\right)e^{-\beta\tau_f}I_{\{\tau_m<\tau_f\le T\}}\\
&\qquad + U\big(X(T)\big)e^{-\beta T}I_{\{T<\tau_2\}}\Bigg]\\
&= \max_{\boldsymbol{u}\in\mathcal{A}} E\Bigg\{\int_0^{\tau_1\wedge T} U\big(c(t)-H(t)\big)e^{-\beta t}dt + V^f\big(\tau_m, X(\tau_m), H(\tau_m)\big)e^{-\beta\tau_m}I_{\{\tau_m<\tau_f\}}I_{\{\tau_m\le T\}}\\
&\qquad + V^m\left(\tau_f, X(\tau_f), H(\tau_f)\right)e^{-\beta\tau_f}I_{\tau_f\le\tau_m}I_{\tau_f\le T} + U\big(X(T)\big)e^{-\beta T}I_{\{\tau_m<\tau_f\}}I_{\{\tau_1>T\}}\\
&\qquad + U\big(X(T)\big)e^{-\beta T}I_{\{\tau_f\le\tau_m\}}I_{\{\tau_1>T\}}\Bigg\}\\
&= \max_{\boldsymbol{u}\in\mathcal{A}} E\Bigg\{\int_0^{\tau_1\wedge T} U\big(c(t)-H(t)\big)e^{-\beta t}dt\\
&\qquad + V^f\left(\tau_{m-}, X(\tau_{m-})+\frac{p_m(\tau_{m-})}{\eta_m(\tau_{m-})}, \omega H(\tau_{m-})\right)e^{-\beta\tau_m}I_{\{\tau_m<\tau_f\}}I_{\{\tau_m\le T\}}\\
&\qquad + V^m\left(\tau_{f-}, X(\tau_{f-})+\frac{p_f(\tau_{f-})}{\eta_f(\tau_{f-})}, (1-\omega)H(\tau_{f-})\right)e^{-\beta\tau_f}I_{\{\tau_f\le\tau_m\}}I_{\{\tau_f\le T\}}\\
&\qquad + U\big(X(T)\big)e^{-\beta T}I_{\{\tau_1>T\}}\Bigg\}\\
&= V(0,x,h).
\end{aligned}
$$

2、附录 2

定理 2 的证明:

$$J^f(t,x,h;u_f)=E_{t,x,h}\left[\int_t^{\tau_f\wedge T}U(c(s)-H(s))e^{-\beta(s-t)}ds+U\left(X(\tau_f)+\frac{p_f(\tau_f)}{\eta_f(\tau_f)}\right)e^{-\beta(\tau_f-t)}I_{\{\tau_f\le T\}}+U\big(X(T)\big)e^{-\beta(T-t)}I_{\{T<\tau_f\}}|\tau_f>t\right]$$

$$=E_{t,x,h}\left[\int_t^T U\big(c(s)-H(s)\big)e^{-\beta(s-t)}\frac{S_f(s)}{S_f(t)}ds+\int_t^T U\left(X(s)+\frac{p_f(s)}{\eta_f(s)}\right)e^{-\beta(s-t)}\frac{f_f(s)}{S_f(t)}ds+U\big(X(T)\big)e^{-\beta(T-t)}\frac{S_f(T)}{S_f(t)}\right]$$

$$=E_{t,x,h}\left\{\int_t^T\left[U\big(c(s)-H(s)\big)+\lambda_f(s)U\left(X(s)+\frac{p_f(s)}{\eta_f(s)}\right)\right]e^{-\int_t^s\beta+\lambda_f(v)\,dv}ds+U\big(X(T)\big)e^{-\int_t^s\beta+\lambda_f(v)\,dv}\right\}$$

同理可得

$$J^m(t,x,h;\boldsymbol{u}_m)=E_{t,x,h}\left\{\int_t^T\left[U\big(c(s)-H(s)\big)+\lambda_m(s)U\left(X(s)+\frac{p_m(s)}{\eta_m(s)}\right)\right]e^{-\int_t^s\beta+\lambda_m(v)dv}ds+U\big(X(T)\big)e^{-\int_t^T\beta+\lambda_m(v)dv}\right\}.$$

$$J(t,x,h;\boldsymbol{u})=E_{t,x,h}\left[\int_t^T U\big(c(s)-H(s)\big)e^{-\beta(s-t)}\frac{S(s,s)}{S(t,t)}ds+\int_t^T V^f\left(s,X(s)+\frac{p_m(s)}{\eta_m(s)},\omega H(s)\right)e^{-\beta(s-t)}\frac{F_f(s,s)}{S(t,t)}ds+\int_t^T V^m\left(s,X(s)+\frac{p_f(s)}{\eta_f(s)},(1-\omega)H(s)\right)e^{-\beta(s-t)}\frac{F_m(s,s)}{S(t,t)}ds+U\big(X(T)\big)e^{-\beta(T-t)}\frac{S(T,T)}{S(t,t)}\right].$$

3、附录 3

推论 1 的证明：

本文假设$V^f(t,x,h)=A^f(t)\frac{[x+B^f(t)+D^f(t)h]^{1-\gamma}}{1-\gamma}$，其中$A^f(T)=1$，$B^f(T)=0$，$D^f(T)=0$。那么本文有

$$V_t^f(t,x,h)=A_t^f(t)\frac{\big(x+B^f(t)+D^f(t)h\big)^{1-\gamma}}{1-\gamma}+A^f(t)B_t^f(t)\big(x+B^f(t)+D^f(t)h\big)^{-\gamma}+A^f(t)D_t^f(t)h\big(x+B^f(t)+D^f(t)h\big)^{-\gamma},$$

$$V_x^f(t,x,h)=A^f(t)\big(x+B^f(t)+D^f(t)h\big)^{-\gamma},$$

$$V_{xx}^f(t,x,h)=-\gamma A^f(t)\big(x+B^f(t)+D^f(t)h\big)^{-\gamma-1},$$

$$V_h^f(t,x,h)=A^f(t)D^f(t)\big(x+B^f(t)+D^f(t)h\big)^{-\gamma}.$$

根据 HJB 方程（3.3）本文可以得到妻子的最优策略满足

$$
\begin{cases}
c=\left[A^f(t)-bA^f(t)D^f(t)\right]^{-\frac{1}{\gamma}}\left[x+B^f(t)+D^f(t)h\right]+h,\\
p^f=\eta_f(t)\left\{\left[\dfrac{\eta_f(t)}{\lambda_f(t)}A^f(t)\right]^{-\frac{1}{\gamma}}\left[x+B^f(t)+D^f(t)h\right]-x\right\},\\
\pi=\dfrac{\alpha}{\sigma^2\gamma}\left[x+B^f(t)+D^f(t)h\right].
\end{cases}
$$

由 HJB 方程，本文有

$$
\begin{aligned}
&-\left[\beta+\lambda_f(t)\right]A^f(t)\frac{\left[x+B^f(t)+D^f(t)h\right]}{1-\gamma}+A_t^f(t)\frac{\left[x+B^f(t)+D^f(t)h\right]}{1-\gamma}+A^f(t)B_t^f(t)\\
&\quad+A^f(t)D_t^f(t)h+A^f(t)\left\{\left[\frac{\alpha^2}{\sigma^2\gamma}-\left[A^f(t)-bA^f(t)D^f(t)\right]^{-\frac{1}{\gamma}}\right.\right.\\
&\quad\left.\left.-\eta_f(t)\left[\frac{\eta_f(t)}{\lambda_f(t)}A^f(t)\right]^{-\frac{1}{\gamma}}\right]\left[x+B^f(t)+D^f(t)h\right]+\left[r+\eta_f(t)\right]x-h+i_f(t)\right\}\\
&\quad-\frac{1}{2}\frac{\alpha^2}{\sigma^2\gamma}A^f(t)\left[x+B^f(t)+D^f(t)h\right]\\
&\quad+A^f(t)D^f(t)\left[b\left[A^f(t)-bA^f(t)D^f(t)\right]^{-\frac{1}{\gamma}}\left[x+B^f(t)+D^f(t)h\right]+bh-ah\right]\\
&\quad+\frac{\left[A^f(t)-bA^f(t)D^f(t)\right]^{\frac{\gamma-1}{\gamma}}\left[x+B^f(t)+D^f(t)h\right]}{1-\gamma}\\
&\quad+\lambda_f(t)\frac{\left[\dfrac{\eta_f(t)}{\lambda_f(t)}A^f(t)\right]^{\frac{\gamma-1}{\gamma}}\left[x+B^f(t)+D^f(t)h\right]}{1-\gamma}=0.
\end{aligned}
$$

将上式按带x项，带h项和常数项进行合并同类项，由于上式对任意$(t,x,h)\in[0,T]\times\mathbb{R}\times\mathbb{R}^+$成立，故$x$项前系数，$h$项前系数以及常数项应为 0，有以下三个方程：

$$
\begin{aligned}
&\frac{-\left[\beta+\lambda_f(t)\right]A^f(t)}{1-\gamma}+\frac{A_t^f(t)}{1-\gamma}+A^f(t)\left[\frac{\alpha^2}{\sigma^2\gamma}-\left[A^f(t)-bA^f(t)D^f(t)\right]^{-\frac{1}{\gamma}}-\eta_f(t)\left[\frac{\eta_f(t)}{\lambda_f(t)}A^f(t)\right]^{-\frac{1}{\gamma}}\right]\\
&\quad-\frac{1}{2}\frac{\alpha^2}{\sigma^2\gamma}A^f(t)+A^f(t)D^f(t)b\left[A^f(t)-bA^f(t)D^f(t)\right]^{-\frac{1}{\gamma}}\\
&\quad+\frac{\left[A^f(t)-bA^f(t)D^f(t)\right]^{\frac{\gamma-1}{\gamma}}}{1-\gamma}+\lambda_f(t)\frac{\left[\dfrac{\eta_f(t)}{\lambda_f(t)}A^f(t)\right]^{\frac{\gamma-1}{\gamma}}}{1-\gamma}+\left[r+\eta_f(t)\right]A^f(t)=0,
\end{aligned}
\tag{A.1}
$$

$$\left\{\frac{-[\beta+\lambda_f(t)]A^f(t)}{1-\gamma}+\frac{A_t^f(t)}{1-\gamma}+A^f(t)\left[\frac{\alpha^2}{\sigma^2\gamma}-\left[A^f(t)-bA^f(t)D^f(t)\right]^{-\frac{1}{\gamma}}-\eta_f(t)\left[\frac{\eta_f(t)}{\lambda_f(t)}A^f(t)\right]^{-\frac{1}{\gamma}}\right]-\right.$$

$$\frac{1}{2}\frac{\alpha^2}{\sigma^2\gamma}A^f(t)+A^f(t)D^f(t)b\left[A^f(t)-bA^f(t)D^f(t)\right]^{-\frac{1}{\gamma}}+\frac{\left[A^f(t)-bA^f(t)D^f(t)\right]^{\frac{\gamma-1}{\gamma}}}{1-\gamma}+\lambda_f(t)\frac{\left[\frac{\eta_f(t)}{\lambda_f(t)}A^f(t)\right]^{\frac{\gamma-1}{\gamma}}}{1-\gamma}+$$

$$\left.A^f(t)(b-a)\right\}D^f(t)+A^f(t)D_t^f(t)-A^f(t)=0, \tag{A.2}$$

$$\left\{\frac{-[\beta+\lambda_f(t)]A^f(t)}{1-\gamma}+\frac{A_t^f(t)}{1-\gamma}+A^f(t)\left[\frac{\alpha^2}{\sigma^2\gamma}-\left[A^f(t)-bA^f(t)D^f(t)\right]^{-\frac{1}{\gamma}}-\eta_f(t)\left[\frac{\eta_f(t)}{\lambda_f(t)}A^f(t)\right]^{-\frac{1}{\gamma}}\right]-\right.$$

$$\frac{1}{2}\frac{\alpha^2}{\sigma^2\gamma}A^f(t)+A^f(t)D^f(t)b\left[A^f(t)-bA^f(t)D^f(t)\right]^{-\frac{1}{\gamma}}+\frac{\left[A^f(t)-bA^f(t)D^f(t)\right]^{\frac{\gamma-1}{\gamma}}}{1-\gamma}+$$

$$\left.\lambda_f(t)\frac{\left[\frac{\eta_f(t)}{\lambda_f(t)}A^f(t)\right]^{\frac{\gamma-1}{\gamma}}}{1-\gamma}\right\}B^f(t)+A^f(t)B_t^f(t)+A^f(t)i_f(t)=0. \tag{A.3}$$

将（A.1）代入（A.2），（A.3）中，本文可以得到$D^f(t)$和$B^f(t)$满足的微分方程为

$$D_t^f(t)-\left[r+\eta_f(t)-b+a\right]D^f(t)-1=0 \quad D^f(T)=0,$$

$$B_t^f(t)-\left[r+\eta_f(t)\right]B^f(t)+i_f(t)=0 \quad B^f(T)=0.$$

可以得到

$$B_t^f(t)=\int_t^T i_f(s)e^{-\int_t^s[r+\eta_f(v)]dv}ds, \quad D^f(t)=-\int_t^T e^{-\int_t^s[r+\eta_f(v)-b+a]dv}ds.$$

从（A.1）本文可以得到$A^f(t)$满足的微分方程为：

$$A_t^f(t)+A^f(t)(1-\gamma)\left[-\frac{[\beta+\lambda_f(t)]}{1-\gamma}+\frac{\alpha^2}{2\gamma\sigma^2}+r+\eta_f(t)\right]$$
$$+\gamma A^f(t)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}}\left[\left[1-bD^f(t)\right]^{\frac{\gamma-1}{\gamma}}+\left[\eta_f(t)\right]^{\frac{\gamma-1}{\gamma}}\left[\lambda_f(t)\right]^{\frac{1}{\gamma}}\right]=0, \quad A_t^f(T)=1.$$

可以得到

$$A^f(t)=\left[e^{-\int_t^T\frac{\gamma-1}{\gamma}\left(-\frac{[\beta+\lambda_f(v)]}{1-\gamma}+\frac{\alpha^2}{2\gamma\sigma^2}+r+\eta_f(v)\right)dv}\right.$$
$$+\int_t^T\left[\left[1-bD^f(s)\right]^{\frac{\gamma-1}{\gamma}}\right.$$
$$\left.\left.+\left[\eta_f(s)\right]^{\frac{\gamma-1}{\gamma}}\left[\lambda_f(s)\right]^{\frac{1}{\gamma}}\right]e^{-\int_t^S\frac{\gamma-1}{\gamma}\left(-\frac{[\beta+\lambda_f(v)]}{1-\gamma}+\frac{\alpha^2}{2\gamma\sigma^2}+r+\eta_f(v)\right)dv}ds\right]^{\gamma}$$