第 43 卷 第 3 期　　应用数学学报　　Vol. 43 No. 3
2020 年 5 月　　ACTA MATHEMATICAE APPLICATAE SINICA　　May, 2020

带消费习惯的最优消费，寿险和投资决策 *

刘敬真
(中央财经大学中国精算研究院，北京 100081)
林荔圆
(中央财经大学保险学院，北京 100081)
孟　辉 †
(中央财经大学中国精算研究院，北京 100081)
(E-mail: menghuidragon@126.com)

摘　要　本文考虑带消费习惯的个体决策者，如何选择最优的消费，寿险和投资支出，以最大化其效用. 假设个体在退休之前将自己的财富在一种无风险资产和一种风险资产上进行分配，并进行消费和购买人寿保险，其目标是最大化退休或死亡前的消费、退休时的财富和遗产组成的效用. 我们通过动态规划的方法，得到相应的 HJB 方程，对于 CRRA 效用类型的个体，得到最优消费、寿险和投资支出的解析解. 通过对比有无消费习惯情况下的解析解，可以发现，加入消费习惯后，个体投资支出会下降；个体的最优消费有了一个随时间变化的下界；当个体的相对风险厌恶系数大于 1 时，最优消费变化的波动率减小，保费支出也会下降. 利用我国的相关数据进行数值模拟，我们发现消费习惯越高的个体，前后期消费支出差距越大，保费支出和投资越低；适应能力越强的个体，消费水平越平滑，承受风险的能力也越大，风险投资越多.

关键词　消费习惯；人寿保险；动态规划；最优策略；效用函数

MR(2000) 主题分类　70H20; 60H30

中图分类　F830.42

1　引言

Merton[1] 在 1969 年首次研究了连续时间下个体的最优消费和投资的问题，在 Mer-

本文 2018 年 9 月 20 日收到. 2019 年 3 月 29 日收到修改稿.
* 国家自然科学基金面上项目 (11771465, 11771466), 中央财经大学 2018 年度 “青年英才” 培育支持计划项目 (QYP1804), 中央高校基本科研业务费专项资金和中央财经大学科研创新团队支持计划资助.
† 通讯作者.

ton 的模型中, 个体可以对一个无风险资产和一个风险资产进行投资, 并进行消费. 此后很多学者基于 Merton 模型基础的进行扩展，研究个体的消费和资产组合问题，其中，有些学者将人寿保险引入模型中, 进而研究个体如何进行最优的消费，人寿保险和投资决策.

国外对个体人寿保险需求的研究较早, 始于 Yarri[2]. 随后 Richard[3] 将 Yarri 中研究个体寿命不确定性的方法加入 Merton 的投资消费决策模型中，首次研究了消费、投资和人寿保险支出的决策问题. 同时， Richard 在模型中还考虑了个体的收入，以及将风险资产由一个推广到 n 个，验证了 Tobin-Markowitz 分离定理. 在这之后又很多学者基于 Richard 的方法进一步研究了人寿保险的需求，如 Pliska 等 [4] 研究了时间贴现率，风险厌恶系数，收入，财富等因素对人寿保险需求的影响，但是此时模型中只涉及无风险资产投资. 其后， Duarte 等 [5] 将 Pliska 的模型进一步推广到可投资多种风险资产.

而国内对个体寿险需求的研究比较晚，比较早的是丁传明等 [6], 其模型考虑了一个没有收入的个体在遗产效用驱动下，所做的终生消费、投资和人寿保险支出的最优决策的连续时间模型，他假设个体的寿命服从一个时间齐性的泊松分布，通过求解 HJB 方程得到个体的最优人寿保险支出. 近来学者们逐渐在这种基础的模型上进行扩展. 景珮等 [7] 进一步在模型中引入了收入，并假设投保人的死亡力随年龄改变，考虑投保人在退休前的消费、投资和人寿保险支出的最优决策的模型，通过数值模拟研究了我国保障型寿险和投资型寿险的需求问题. 梁宗霞等 [8] 又在上述模型中引入随机利率和随机收入，在动态规划的框架下讨论了个体退休前的决策.

但是在这些文献中都没有考虑到个体的消费习惯，人们通常会发现现在的消费行为会受到过去的消费行为的影响，我们把过去消费行为的累积称为消费习惯. 学者们最早在研究消费支出的模型中加入消费习惯是为了解释消费平滑的现象， Campbell[9] 用经验数据证明了这一点. Lally[10] 也通过实验验证了消费习惯的存在. Detemple 和 Zapatero[11] 最早将消费习惯引入 Merton 模型，考虑了带有消费习惯的个体是最优消费投资决策. Diaz 等 [12] 发现消费习惯将会提升个体的预防储蓄. 国内学者冯蕾 [13] 结合消费习惯，考虑了个体退休前后的消费决策，从理论上得出了在考虑内生性消费习惯时消费支出更平滑的结论. 目前很少有涉及结合内生消费习惯来考虑保险需求的研究，Mounira Ben-Arab[14] 和 Naziha kasraoui[15] 结合了消费习惯来考虑一个最优的财产保险比例. 而对于结合消费习惯考虑个人寿险需求的研究几乎没有.

本文在 Richard 模型的基础上，结合消费习惯，研究在 CRRA 效用函数下，个体的最优消费、寿险和投资决策，并讨论消费习惯对个体最优决策的影响，以及人寿保险在个体决策中的作用. 本文的贡献在于三方面，首先将消费习惯引入模型，得到了具有消费习惯的个体的最优消费、寿险和投资决策；其次从解析解上分析引入消费习惯给最优决策带来的影响，发现引入消费习惯降低了决策时用于分配的可用资产，同时也给分配比例带来影响；最后，用我国的相关数据进行了数值模拟，用以分析消费习惯给最优决策带来的影响.

本文剩余部分结构如下：第 2 节对金融市场，保险市场以及消费习惯进行刻画，建立模型和随机优化控制问题；第 3 节构建值函数对应的 HJB 方程，得到个体最优决策

的解析解；第 4 节对解析解的经济含义进行分析，并讨论引入消费习惯给解带来的影响；第 5 节用我国的数据进行模拟，分析消费习惯对最优决策的影响；第 6 节总结全文.

2　假设与建模

2.1　金融市场

假设金融市场上有两种资产可供个体选择，一种是无风险资产，另一种是风险资产，无风险资产的收益率是 $\mu_0(t)$, 其价格过程为：

$$\frac{\mathrm{d}S_0(t)}{S_0(t)}=\mu_0(t)\,\mathrm{d}t,$$

风险资产的价格过程为：

$$\frac{\mathrm{d}S_1(t)}{S_1(t)}=\mu_1(t)\,\mathrm{d}t+\sigma(t)\,\mathrm{d}Z(t).$$

其中 $\mu_1(t)$ 为风险资产的回报率， $\sigma(t)$ 为风险资产的波动率， $Z(t)$ 是概率空间 $(\Omega,\mathfrak{F},P)$ 上的标准布朗运动， $\{\mathfrak{F}(t)\}_{t\in[0,T]}$ 是由 $Z(t)$ 形成的域流.

个体对其财富进行投资增值，其中个体投资在风险资产上的头寸为 $\theta(t)$, 因此将剩下的 $W(t)-\theta(t)$ 投资在无风险资产上．这里我们允许个体卖空，故 $\theta(t)\in\mathbb{R}$.

2.2　保险市场

假设个体在 $t=0$ 时刻生存，记其寿命为 τ. 定义其在 t 时刻的死亡力为：

$$\lambda(t)=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{P(t\le\tau\le t+\Delta t|\tau\ge t)}{\Delta t},$$

可以将死亡力视为个体在 $t=0$ 时刻生存，且在下一瞬间死亡的概率.

记 $S(s,t)=P(\tau>s|\tau>t)$, 表示个体在 t 时刻生存，且在 s 时刻也生存的概率，其中 $s\ge t$, 则从死亡力的定义中可以看出：

$$S(s,t)=e^{-\int_t^s\lambda(\mu)\,\mathrm{d}\mu},$$

从而可以得到个体在 t 时刻生存条件下，死亡时间的密度函数：

$$f(s,t)=\lambda(s)e^{-\int_t^s\lambda(\mu)\,\mathrm{d}\mu}.$$

假设保险公司销售一款瞬时 (保险期间无穷短) 的人寿保险, 收取的寿险费率为 $\eta(t)$, 因为保险公司会收取附加费率，通常有 $\eta(t)\ge\lambda(t)$. 如果被保险人在 t 支出 $p(t)$ 购买该人寿保险，并且在购买保险后立刻死亡，那么被保险人的财产继承人可以得到 $\frac{p(t)}{\eta(t)}$ 的保险金.

2.3 消费习惯

个体在 t 时刻的消费为 $c(t)$, 个体在进行消费决策时，受过去的消费行为影响，倾向于保持一定的消费水平，这个消费水平是由个体在过去的消费进行加权平均得到的，我们称这个消费水平为消费习惯. 我们延续 Detemple[11] 中的定义，将个体的消费习惯 $H(t)$ 定义为：

$$H(t)=e^{-at}H_0+b\int_0^t e^{a(s-t)}c(s)\,\mathrm{d}s.$$

其中： a 度量了个体对过去消费的遗忘程度，因此越是早期的消费，越容易被个体遗忘，其权重越小. a 越大，说明个体对过去的遗忘程度越高，也意味着个体对当下环境的适应能力越强，通常有 $a>0$. b 度量了个体对维持当前消费水平的倾向， b 越大，说明个体希望未来能在更大的程度上维持现在的消费水平，通常有 $b>0$. H_0 为个体初始消费习惯，是个体消费习惯形成的一个起点， H_0 越大，个体的消费习惯也就越大，H_0 的大小与社会平均发展水平以及个体的生活环境等因素相关，社会发展水平越高，个体的生活环境越好， H_0 越大.

a, b 的绝对大小代表消费习惯高低， a 越大， b 越小，消费习惯越高. a, b 的相对大小代表了消费习惯模式，对于 $a<b$ 的个体而言，其对过去消费的依赖程度很大，缺乏对现实环境的适应能力，而对于 $a>b$ 的个体而言，过去的消费水平很快就会被遗忘，因此会更注重当前的现实环境，所以对环境改变的适应能力更强.

对 $H(t)$ 进行微分可得：

$$\mathrm{d}H(t)=[bc(t)-aH(t)]\,\mathrm{d}t. \tag{2.1}$$

2.4 目标函数

记个体在 t 时刻的财富为 $W(t)$, 初始时刻的财富为 W_0. 个体在 t 时刻的工资收入为 $i(t)$, 投资无风险资产的收益为 $[W(t)-\theta(t)]\frac{\mathrm{d}S_0(t)}{S_0(t)}$, 投资风险资产的收益为 $\theta(t)\frac{\mathrm{d}S_1(t)}{S_1(t)}$, 并且在 t 时刻，个体的消费支出为 $c(t)$, 购买寿险支出为 $p(t)$. 因此个体的财富变化过程服从：

$$\begin{aligned}\mathrm{d}W(t)=&\theta(t)\frac{\mathrm{d}S_1(t)}{S_1(t)}+[W(t)-\theta(t)]\frac{\mathrm{d}S_0(t)}{S_0(t)}-c(t)\mathrm{d}t-p(t)\mathrm{d}t+i(t)\,\mathrm{d}t\\=&\theta(t)\big[\mu_1(t)\mathrm{d}t+\sigma(t)\mathrm{d}Z(t)\big]+\mu_0(t)[W(t)-\theta(t)]\,\mathrm{d}t-c(t)\,\mathrm{d}t-p(t)\,\mathrm{d}t+i(t)\,\mathrm{d}t,\end{aligned}$$

假设个体在 T 时刻退休，个体的效用来源于三个部分. 其一是个体在退休或者死亡之前的超额消费带来的效用，超额消费指的是消费超过消费习惯的部分. 因此，消费习惯也可以表示为个体的基础消费标准，个体只有在消费水平超过其消费习惯的时候才会获得效用. 其二是遗产效用，如果个体在退休前死亡，死亡后会给其继承人留下遗产 $L(\tau)=W(\tau)+\frac{p(\tau)}{\eta(\tau)}$, 遗产越高，个体的效用水平越高. 其三是个体在退休时的财富带来的效用，如果个体在退休后死亡，其在 T 时刻的财富 $W(T)$ 可以视为其积累的退休金，因此个体希望 $W(T)$ 越高越好. t 时刻产生的效用通过时间贴现函数 $e^{-\delta t}$ 贴现到 0 时刻，累加获得个体的效用函数，用于衡量策略 $\{c(t),p(t),\theta(t)\}_{0\le t\le T}$ 的优劣. δ 表示

个体的耐心程度， δ 越大，个体就越耐心．个体通过选择 $\{c(t),p(t),\theta(t)\}_{0\le t\le T}$ 来最大化其效用．

因此其目标函数为：

$$\max_{\{c,p,\theta\}\in\mathfrak{A}} E\Big\{\int_0^{T\wedge\tau} e^{-\delta t}U(c(t)-H(t))\,\mathrm{d}t + e^{-\delta\tau}U\Big(W(\tau)+\frac{p(\tau)}{\eta(\tau)}\Big)I_{(\tau\le T)} + e^{-\delta T}U(W(T))I_{(\tau>T)}\Big\},$$

其中 $U(x)$ 为严格递增且凹效用函数，定义域为 $\mathbb{R}^+$, 且满足 Inada 条件，即有 $U^{'}(x)>0$, $U^{''}(x)<0$, $\lim\limits_{x\to 0}U^{'}(x)=+\infty$, $\lim\limits_{x\to+\infty}U^{'}(x)=0$.

定义 2.1 如果一个 $\mathbb{R}^3$ 上的随机过程 $\{c(t),\theta(t),p(t)\}$ 满足：

(1) 是 $\{\mathfrak{F}(t)\}_{t\in[0,T]}$ 可测的；

(2) $E\big[\int_0^T[\theta(t)\sigma(t)]^2\,\mathrm{d}t\big]<\infty$;

(3) $\forall\, t\in[0,T]$, $c(t)\ge 0$, $W(t)+\frac{p(t)}{\eta(t)}\ge 0$ 以及 $W(T)\ge 0$,

则称 $\{c(t),\theta(t),p(t)\}$ 为一个可行策略过程，所有可行策略过程组成的集合为可行集 $\mathfrak{A}$.

3 CRRA 效用函数下的最优策略

这里取效用函数为 CRRA 效用函数形式，即 $U(x)=\frac{x^{1-\gamma}}{1-\gamma}$, 其中 $\gamma>0$ 且 $\gamma\ne 1$. 因此最优化问题可以写为：

$$\begin{aligned}\max_{\{c,p,\theta\}\in\mathfrak{A}}\quad & E\Big\{\int_0^{T\wedge\tau} e^{-\delta t}\frac{[c(t)-H(t)]^{1-\gamma}}{1-\gamma}\,\mathrm{d}t + e^{-\delta\tau}\frac{[W(\tau)+\frac{p(\tau)}{\eta(\tau)}]^{1-\gamma}}{1-\gamma}I_{(\tau\le T)} \\ & + e^{-\delta T}\frac{[W(T)]^{1-\gamma}}{1-\gamma}I_{(\tau>T)}\Big\} \\ \text{s.t.}\quad & \mathrm{d}W(t)=\theta(t)[\mu_1(t)\mathrm{d}t+\sigma(t)\mathrm{d}Z(t)]+\mu_0(t)[W(t)-\theta(t)]\mathrm{d}t \\ & -c(t)\mathrm{d}t-p(t)\mathrm{d}t+i(t)\,\mathrm{d}t,\qquad t\in[0,T\wedge\tau].\end{aligned}\tag{3.1}$$

记值函数

$$\begin{aligned}J(t,W(t),H(t)) = \max_{\{c,p,\theta\}\in\mathfrak{A}} E_t\Big\{&\int_t^{T\wedge\tau} e^{-\delta(s-t)}\frac{[c(s)-H(s)]^{1-\gamma}}{1-\gamma}\,\mathrm{d}s \\ &+ e^{-\delta(\tau-t)}\frac{[W(\tau)+\frac{p(\tau)}{\eta(\tau)}]^{1-\gamma}}{1-\gamma}I_{(\tau\le T)} \\ &+ e^{-\delta(T-t)}\frac{[W(T)]^{1-\gamma}}{1-\gamma}I_{(\tau>T)}|\tau>t\Big\}.\end{aligned}$$

假设死亡时间 τ 和 $Z(t)$ 形成的域流 $\{\mathfrak{F}(t)\}_{t\in[0,T]}$ 相互独立，则值函数可改写为：

$$J(t,W(t),H(t)) = \max_{\{c,p,\theta\}\in\mathfrak{A}} E_t\Big\{\int_t^T S(s,t)e^{-\delta(s-t)}\frac{[c(s)-H(s)]^{1-\gamma}}{1-\gamma}\,\mathrm{d}s$$

$$
\begin{aligned}
&+\int_t^T f(s,t)e^{-\delta(s-t)}\frac{[W(s)+\frac{p(s)}{\eta(s)}]^{1-\gamma}}{1-\gamma}\,\mathrm{d}s\\
&+S(T,t)e^{-\delta(T-t)}\frac{[W(T)]^{1-\gamma}}{1-\gamma}\Bigg\}\\
=&\max_{\{c,p,\theta\}\in\mathfrak{A}}E_t\Bigg\{\int_t^T e^{-\int_t^s\delta+\lambda(\mu)\,\mathrm{d}\mu}\frac{[c(s)-H(s)]^{1-\gamma}}{1-\gamma}\,\mathrm{d}s\\
&+\int_t^T\lambda(s)e^{-\int_t^s\delta+\lambda(\mu)\,\mathrm{d}\mu}\frac{[W(s)+\frac{p(s)}{\eta(s)}]^{1-\gamma}}{1-\gamma}\,\mathrm{d}s\\
&+e^{-\int_t^T\delta+\lambda(\mu)\,\mathrm{d}\mu}\frac{[W(T)]^{1-\gamma}}{1-\gamma}\Bigg\}.
\end{aligned}
$$

根据动态优化原理，可得 $J(t,W(t),H(t))$ 满足以下 HJB 方程：

$$
\begin{aligned}
&\max_{c(t)>H(t),p(t)>-W(t)\eta(t),\theta(t)}\Bigg\{\frac{[c(t)-H(t)]^{1-\gamma}}{1-\gamma}+\lambda(t)\frac{[W(t)+\frac{p(t)}{\eta(t)}]^{1-\gamma}}{1-\gamma}\\
&+J_t-[\lambda(t)+\delta]J+J_H[bc(t)-aH(t)]+J_w\big\{\theta(t)[\mu_1(t)-\mu_0(t)]\\
&+W(t)\mu_0(t)-c(t)-p(t)+i(t)\big\}+\frac{1}{2}J_{ww}\theta(t)^2\sigma(t)^2\Bigg\}=0,
\end{aligned}\tag{3.2}
$$

终值条件为 $J(T,W(T),H(T))=\frac{[W(T)]^{1-\gamma}}{1-\gamma}$.

定理 3.1 $J(t,W(t),H(t))=k(t)^{\gamma}U(Y(t))$ 是 HJB 方程 (3.2) 的解，其中

$$
\begin{cases}
Y(t)=W(t)+B(t)+A(t)H(t), & (3.3\text{a})\\
k(t)=e^{-\int_t^T\frac{\gamma-1}{\gamma}M(y)\,\mathrm{d}y}+\int_t^T\Big\{[1-bA(s)]^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} & \\
\qquad+\lambda(s)^{\frac{1}{\gamma}}\eta(s)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}}\Big\}e^{-\int_t^s\frac{\gamma-1}{\gamma}M(y)\,\mathrm{d}y}\,\mathrm{d}s, & (3.3\text{b})\\
A(t)=-\int_t^T e^{-\int_t^s[\mu_0(y)+\eta(y)-b+a]\,\mathrm{d}y}\,\mathrm{d}s, & (3.3\text{c})\\
B(t)=\int_t^T i(s)e^{-\int_t^s\mu_0(y)+\eta(y)\,\mathrm{d}y}\,\mathrm{d}s, & (3.3\text{d})\\
M(t)=-\frac{\lambda(t)+\delta}{1-\gamma}+\frac{1}{2}\frac{[\mu_1(t)-\mu_0(t)]^2}{\gamma\sigma(t)^2}+\mu_0(t)+\eta(t), & (3.3\text{e})
\end{cases}
$$

从而，策略

$$
\begin{cases}
c^*(t)=[1-bA(t)]^{-\frac{1}{\gamma}}k(t)^{-1}Y(t)+H(t), & (3.4\text{a})\\
p^*(t)=\eta(t)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}}\lambda(t)^{\frac{1}{\gamma}}k(t)^{-1}Y(t)-W(t)\eta(t), & (3.4\text{b})\\
\theta^*(t)=\Big[\frac{\mu_1(t)-\mu_0(t)}{\gamma\sigma(t)^2}\Big]Y(t) & (3.4\text{c})
\end{cases}
$$

是优化问题 (3.1) 的最优可行策略.

证 由 (3.2)HJB 方程的一阶条件可得

$$\begin{cases} c^*(t) = (J_w - bJ_H)^{-\frac{1}{\gamma}} + H(t), \\ p^*(t) = \eta(t)\Big\{\Big[\dfrac{J_w\eta(t)}{\lambda(t)}\Big]^{-\frac{1}{\gamma}} - W(t)\Big\}, \\ \theta^*(t) = \dfrac{-J_w[\mu_1(t) - \mu_0(t)]}{J_w w \sigma(t)^2}. \end{cases}$$

故 $J(t, W(t), H(t))$ 满足 PDE:

$$\frac{[c^*(t) - H(t)]^{1-\gamma}}{1-\gamma} + \lambda(t)\frac{[W(t) + \frac{p^*(t)}{\eta(t)}]^{1-\gamma}}{1-\gamma} + J_t - [\lambda(t) + \delta]J + J_H[bc^*(t) - aH(t)]$$
$$+ J_w\big\{\theta^*(t)[\mu_1(t) - \mu_0(t)] + W(t)\mu_0(t) - c^*(t) - p^*(t) + i(t)\big\} + \frac{1}{2}J_{ww}\theta^*(t)^2\sigma(t)^2 = 0,$$

将 $J(t, W(t), H(t)) = k(t)^\gamma U(Y(t))$ 代入验证可知其满足上述 PDE, 进而可得最优策略 $\{c^*(t), p^*(t), \theta^*(t)\}$. 证毕.

4 解的经济含义

4.1 可用资本

在经典 Merton 模型中，得到的最优消费和投资决策为个体财富的一个比例. 而从上述建立的随机控制问题中得到的最优解可以看到，最优的消费、寿险和投资决策都是 $Y(t)$ 的线性函数. 因此，下文我们将 $Y(t)$ 视为个体的可用资产，个体的消费、保费支出和投资决策可以视为是对 $Y(t)$ 的一个分配.

由 (3.3d) 所得的 $B(t)$ 可以视为是将个体未来收入折现到 t 时刻，许多文献 [3,8] 中都将 $B(t)$ 称为个体在 t 时刻的人力资本.

由 (3.3c), 可将 $|A(t)H(t)|$ 视为是个体为了保证未来消费水平不低于 $H(t)$ 而提前准备的资本，可视为一种强制储蓄，因为 $A(t)H(t) < 0$, 故将 $A(t)H(t)$ 称为个体在 t 时刻的未来消费负债.

由 (3.3a) 可以看出，可用资产 $Y(t)$ 是由个体在 t 时刻的财富，人力资本以及为了保证未来消费的未来消费负债组成.

易知，如果个体不具有消费习惯，则 $Y(t)$ 仅由 t 时刻的财富和人力资本组成，而当引入了消费习惯之后，个体需要多储蓄一部分用于保证日后的消费，因此对于 t 时刻具有相同财富和未来收入的个体而言，具有消费习惯的个体进行决策的时候的可用资产就会减少. 对 $Y(t)$ 进行微分，可得：

$$\begin{aligned} \mathrm{d}Y(t) =& Y(t)\Big\{\Big[\frac{(\mu_1(t) - \mu_0(t))^2}{\gamma\sigma(t)^2} + \mu_0(t) - [1 - bA(t)]^{\frac{\gamma-1}{\gamma}}k(t)^{-1} \\ & - \eta(t)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}}\lambda(t)^{\frac{1}{\gamma}}k(t)^{-1} + \eta(t)\Big]\mathrm{d}t + \Big[\frac{\mu_1(t) - \mu_0(t)}{\gamma\sigma(t)}\mathrm{d}Z(t)\Big]\Big\}, \end{aligned}$$

故 $Y(t) > 0$, 因此消费负债不会超过个体在 t 时刻的财富和人力资本的总和.

4.2 最优消费决策

由 (3.4a) 可得

$$
\begin{aligned}
c^*(t)=&[1-bA(t)]^{-\frac{1}{\gamma}}k(t)^{-1}W(t)+[1-bA(t)]^{-\frac{1}{\gamma}}k(t)^{-1}B(t)\\
&+\{[1-bA(t)]^{-\frac{1}{\gamma}}k(t)^{-1}A(t)+1\}H(t).
\end{aligned}
$$

其中第 1 项表示消费的财富效应, 第 2 项表示了消费的收入效应, 第 3 项表示消费习惯对消费的影响. 由 $A(t)$ 的表达式可以得到 $A(t)<0$, 因此 $W(t)$ 和 $B(t)$ 的系数都为正数, 可知最优消费随着财富, 收入的增加而增加. 如果参数选择使得 $[1-bA(t)]^{-\frac{1}{\gamma}}k(t)^{-1}A(t)+1>0$, 那么消费也随着消费习惯的增加而增加, 而消费习惯会随着历史消费水平的增加而增加, 因此, 过去的消费水平对未来的消费水平也有促进作用.

引入消费习惯对于最优消费的影响是多方面的, 首先会影响到可用资产, 从上文的分析中可以看到, 引入消费习惯后, 个体可进行分配的可用资产减少了.

其次是可用资产的系数发生了改变, 对于消费和保费支出共有的乘子 $k(t)$ 而言, 若不存在消费习惯, 其表达式为:

$$
\hat{k}(t)=e^{-\int_t^T\frac{\gamma-1}{\gamma}M(y)\,\mathrm{d}y}+\int_t^T[1+\lambda(s)^{\frac{1}{\gamma}}\eta(s)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}}]e^{-\int_t^s\frac{\gamma-1}{\gamma}M(y)\,\mathrm{d}y}\,\mathrm{d}s.
$$

因为 $A(t)<0$, 故当 $\gamma>1$ 时, 有 $k(t)>\hat{k}(t)$, 当 $0<\gamma<1$ 时, 有 $k(t)<\hat{k}(t)$. 而且, 具有消费习惯的个体会将 $k(t)$ 缩小 $[1-bA(t)]^{-\frac{1}{\gamma}}$. 而不具有消费习惯的个体不会调整 $\hat{k}(t)$.

最后, 考虑了消费习惯之后, 最优消费还要附加上 t 时刻的消费习惯函数 $H(t)$. 由 (3.3b) 及 (3.3c) 可得, $k(t)>0,\ A(t)<0$, 故有 $c^*(t)>H(t)$, 因此当加入了消费习惯之后对消费有了一个最低的限制, 而没有消费习惯的时候, 最优消费的下界仅仅为 0. 并且当 $a>b$ 时, 由 (2.1) 可知 $dH(t)>0$, 即随着时间的推移, 最优消费水平的下界会不断的上升.

综合考虑这三方面的因素, 消费习惯对最优消费水平的影响并非单调, 而是十分复杂的, 后文将会采用数值模拟进行分析.

对最优消费进行微分可得:

$$
\begin{aligned}
dc^*(t)=&[1-bA(t)]^{-\frac{1}{\gamma}}k(t)^{-1}Y(t)\left[\frac{\gamma+1}{2\gamma}\frac{[\mu_1(t)-\mu_0(t)]^2}{\gamma\sigma(t)^2}+\frac{[\mu_0(t)+\eta(t)]}{\gamma}-\frac{\lambda(t)+\delta}{\gamma}\right]\mathrm{d}t\\
&+\frac{1}{\gamma}[1-bA(t)]^{-\frac{1}{\gamma}}k(t)^{-1}bA^{'}(t)\mathrm{d}t+[bc^*(t)-aH(t)]\mathrm{d}t\\
&+[1-bA(t)]^{-\frac{1}{\gamma}}k(t)^{-1}Y(t)\left[\frac{\mu_1(t)-\mu_0(t)}{\gamma\sigma(t)}\right]\mathrm{d}Z(t),
\end{aligned}
$$

易知有 $[1-bA(t)]^{\frac{1}{\gamma}}<1$, 故根据上文对 $k(t)$ 的分析, 当 $\gamma>1$ 时, 消费习惯的引入会减小最优消费变化的波动率, 使得最优消费更加平稳.

4.3 最优寿险决策

由 (3.4b) 可得

$$\begin{aligned}p^*(t) =&\eta(t)\Big[\Big(\frac{\lambda(t)}{\eta(t)}\Big)^{\frac{1}{\gamma}}k(t)^{-1}-1\Big]W(t)+\eta(t)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}}\lambda(t)^{\frac{1}{\gamma}}k(t)^{-1}B(t)\\&+\eta(t)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}}\lambda(t)^{\frac{1}{\gamma}}k(t)^{-1}A(t)H(t).\end{aligned}$$

同最优的消费支出一样，上式第一项表示保费支出的财富效应，第二项表示保费支出的收入效应，第三项表示消费习惯对保费支出的影响. 显然 $B(t)$ 系数为正， $H(t)$ 系数为负，因此保费支出的收入效应为正，但是消费习惯的增加导致保费支出减少，这表明过去的消费水平的提升导致未来的消费水平上升，继而挤压未来的保费支出. 而保费支出的财富效应取决于 $k(t)$ 和 $\big(\frac{\lambda(t)}{\eta(t)}\big)^{\frac{1}{\gamma}}$ 的大小，当 $k(t)>\big(\frac{\lambda(t)}{\eta(t)}\big)^{\frac{1}{\gamma}}$ 时，财富前的系数为负，也就意味着越富有的个体保费支出减小，当 $k(t)<\big(\frac{\lambda(t)}{\eta(t)}\big)^{\frac{1}{\gamma}}$ 时，财富前的系数为正，此时保费支出有了正的财富效应.

当引入消费习惯之后，由 (3.4b) 和上文对可用资产 $Y(t)$ 以及乘子 $k(t)$ 的分析可知，当 $\gamma>1$ 时，有 $k(t)>\hat{k}(t)$, 可用资产下降，因此引入消费习惯会降低保费支出；当 $0<\gamma<1$ 时，有 $k(t)<\hat{k}(t)$, 决策者将考虑把更多比例的可用资产用于购买保险，但是由于引入消费习惯减少了可用资产，因此对保费支出的影响不明确.

4.4 最优投资决策

由 (3.4c) 可得：

$$\theta^*(t)=\Big[\frac{\mu_1(t)-\mu_0(t)}{\gamma\sigma(t)^2}\Big]W(t)+\Big[\frac{\mu_1(t)-\mu_0(t)}{\gamma\sigma(t)^2}\Big]B(t)+\Big[\frac{\mu_1(t)-\mu_0(t)}{\gamma\sigma(t)^2}\Big]A(t)H(t).$$

显然当市场的风险价格为正时， $W(t), B(t)$ 的系数为正， $H(t)$ 的系数为负，即投资的财富和收入效应都为正，但是消费习惯的存在会令个体减少风险投资的头寸，个体的投资行为会变得更加保守.

引入消费习惯不改变将可用资产用于投资的比例，但是由于引入消费习惯本身降低了可用资产，相应地个体的投资支出就会减少，因为个体会将部分资产通过无风险的储蓄来保障未来的消费，这也就意味着有消费习惯的个体投资决策会变得保守.

5 数值模拟

从上文的分析得到个体在退休前最大化其目标效用函数的最优的消费支出，保费支出和投资在风险资产上头寸的解析解. 下文通过数值模拟来分析消费习惯对最优消费、寿险和投资决策的影响.

5.1 参数设置

在下文的分析中，我们考虑在 20–60 岁之间的个体决策者的最优消费，寿险和投资决策，同时参考景珮 [7] 中对参数的选取方法来选取所需的参数.

(1) 无风险收益率：采用 2017 年全年的 SHIBOR 人民币隔夜拆借利率的均值，根据历史数据计算得到 $\mu_0(t) = 0.026266$.

(2) 风险资产收益率：常见的个体可投资的风险资产有债券，基金，股票，其中股票是二级市场上最活跃的风险资产，因此这里采用 2017 年沪深 300 指数的日收益率的均值表示风险资产收益率，根据历史数据计算有 $\mu_1(t) = 0.299667$.

(3) 风险资产波动率：采用 2017 年沪深 300 指数的日收益率的波动率表示风险资产波动率，计算得到 $\sigma(t) = 2.47235$.

(4) 死亡力：我国男性退休年龄为 60 岁，考察一个 20 岁的被保险人，因此取 $T = 60$. 假设被保险人在 $x \sim x+1$ 岁之间的死亡力为常数，则在 $x \sim x+1$ 岁被保险人的死亡力为 $\lambda_x = -\ln(p_x)$. 根据保险公司定期寿险定价时所采用的中国人身保险业经验生命表 (2010–2013) 非养老类业务一表 20 岁到 60 岁之间的死亡率，计算被保险人在 20 岁到 60 岁之间的死亡力. 可以发现 20 岁到 60 岁之间的死亡力的散点图接近时间的二次函数，采用 OLS 估计法进行拟合得到：

$$\lambda(t) = 0.000959 - 0.00012t + 0.000008t^2.$$

(5) 费率：假设保险公司不收取附加费用，即 $\eta(t) = \lambda(t)$.

(6) 工资：采用 2016 年全国城镇单位就业人员平均工资作为基础工资，工资年增长率采用 2016 年通货膨胀率，因此有 $i(t) = 67569e^{0.075t}$.

(7) 初始财富：根据冯蕾和梁治安 [13]，初始财富设置为基础工资的 4 倍，因此按比例设置 $W_0 = 270276$.

(8) 时间贴现因子：根据李纯青和徐寅峰 [16]，采用固定的时间贴现因子 $\delta = 0.1085$.

(9) 风险厌恶系数：根据 Constantinide 和 George[17]，设置 $\gamma = 2.2$.

(10) 消费习惯参数：我们分别从消费习惯高低和消费习惯模式两方面来讨论消费习惯对于最优决策的影响.

首先我们设置参数 $a = b$ 来讨论在消费习惯高低对最优决策的影响. 在这种参数设置下，消费习惯的上升程度取决于当前消费和历史消费习惯的差，即个体将当前消费大于历史消费习惯的部分的一定比例加入消费习惯之中，从而不断提升自己的最低消费标准，故而当参数 a, b 越大时，表明个体的形成消费习惯的倾向越大，消费习惯越高. 我们考虑四种情况，分别为无消费习惯、低消费习惯中等消费习惯和高消费习惯下的最优策略，从而分析具有不同消费习惯的个体决策在的最优消费、寿险和投资决策的区别，其参数设置如表 1 所示.

表 1　消费习惯参数的假设 1

No habit formation	Low habit formation	Medium habit formation	Hight habit formation
$a = b = 0$	$a = b = 0.1$	$a = b = 0.3$	$a = b = 0.5$

其次，我们设置 $a > b$, $a = b$ 和 $a < b$ 三种情况来讨论不同消费习惯形成模式对最优决策的影响. $a < b$ 的个体对过去消费的依赖程度很大，对环境改变的适应能力差，

$a > b$ 的个体对环境改变的适应能力更强．具体对三种不同消费习惯模式的参数假设如表 2 所示．

表 2 消费习惯参数的假设 2

$a > b$	$a = b$	$a < b$
$a = 0.2, b = 0.1$	$a = b = 0.15$	$a = 0.1, b = 0.2$

根据熊和平 [18]，在每种不同的消费习惯参数假设下，都设置初始消费习惯 $H_0 = 0.11W_0$.

5.2 消费习惯高低对最优决策的影响

5.2.1 消费习惯高低对最优消费路径的影响

首先，从图 1 中可以看到，在我们所设置的参数情景下，当加入消费习惯之后，最优消费从原先随时间递减变成随时间递增．因为我们设置消费习惯的参数为 $a = b$，而 $c^*(t) > H(t)$，所以从 (2.1) 中可知，消费习惯一定是逐期递增的，因此进一步推进消费支出逐期递增．

其次，当个体形成消费习惯的倾向越大，也就是 $a = b$ 增大的情况下，个体的消费支出会越靠近消费习惯．这说明形成消费习惯的倾向越大，个体可以超出标准进行超额消费的能力就越小．

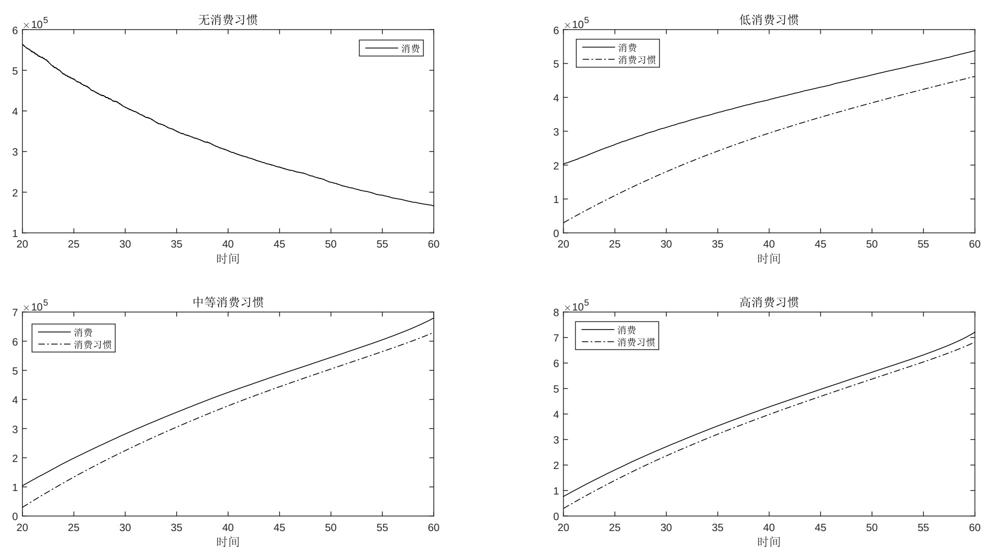

图 1 不同消费习惯水平下的消费支出和消费习惯路径对比

图 2 将四种情形下的最优消费路径进行对比，可以发现，消费习惯越大，个体的最

优消费路径越陡. 一个具有较高消费的个体在前期的消费要少, 以便储蓄足够的金额来使日后的消费习惯得到满足. 当参数 a,b 越趋于 0 的时候, 个体既有一个不断上升的消费下界, 这个下界上升的速度又不至于过快, 个体的终身消费就比较平滑.

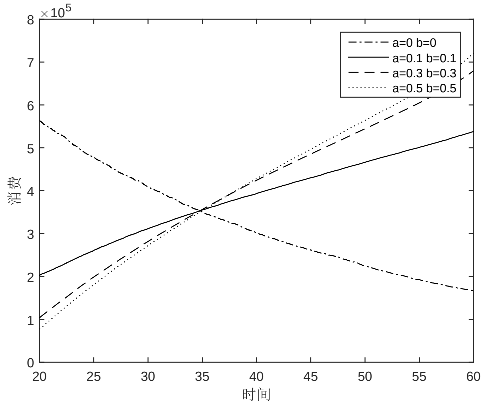

图 2 不同消费习惯水平下的消费支出路径对比

5.2.2 消费习惯高低对最优寿险决策的影响

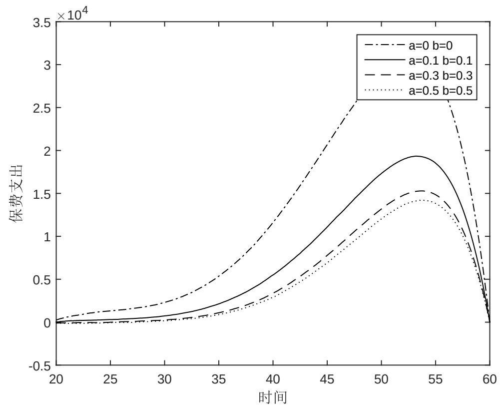

图 3 不同消费习惯水平下的保费支出对比

图 3 对比了不同消费习惯水平下的保费支出, 无论消费习惯是高是低, 最优保费支出都呈现出了先增后减的驼峰形状. 个体对寿险的需求来自于遗产动机, 在青年时期, 个体的物质基础还很薄弱, 因此需要借债消费, 从而导致负债. 由于引入了遗产动机, 个体希望留下正的遗产, 因此会购买寿险, 以防在死后留下尚未偿还的负债. 例如, 在现实生活中, 银行要求贷款人购买定期寿险来规避由于贷款人死亡而无法偿还剩余贷款的风险. 因此, 在青年时期, 随着负债水平的上升, 个体会不断增加寿险保费支出, 之后, 随着时间的推进, 个体的财富在逐渐积累, 负债水平下降, 个体的寿险保费支出

也开始下降.

在前文对解析解的分析中，我们认为，相对风险厌恶系数大于 1 时，越高的消费习惯会导致个体可用于当前支配的资产减少，并且在保费支出的比例上也会下降，因此，保费支出在很大程度上会随着消费习惯的上升而下降. 从我们的模拟结果来看，具有较高消费习惯的个体终身支出的保费始终要小于具有较低消费习惯的个体，这印证了上文的分析.

5.2.3 消费习惯高低对最优风险投资支出路径的影响

从图 4 可以看出，最优的风险资产投资头寸逐期递减. 从解析解的形式可以看出，当无风险利率，风险收益率和波动率为常数的时候，个体每期的风险资产投资都会是可用资产 $Y(t)$ 的一个固定的比例，因此，风险投资支出其实也反映出个体在 t 时刻可以进行分配的资产.

消费习惯对风险资产投资的影响和对消费支出类似，具有较高消费习惯的个体在前期的风险资产投资支出大，在后期的风险资产投资支出小. 对于一个有更高消费习惯的个体而言，在青年时期要考虑到未来更多的消费，因此在青年时会减少自己的支出，将更多的资产进行投资增值以满足未来的消费，因此前期的投资支出要更高. 到了老年，由于消费水平上升，大部分资产都用于消费，所以可投资进行的资产数量就会下降. 因此在图中可以看到一个具有高消费习惯的个体的风险投资支出曲线会穿过具有较低消费习惯个体的风险投资支出曲线. 但是，无论消费习惯高低，具有消费习惯的个体的风险投资支出都会比不具有消费习惯的个体的投资支出要少.

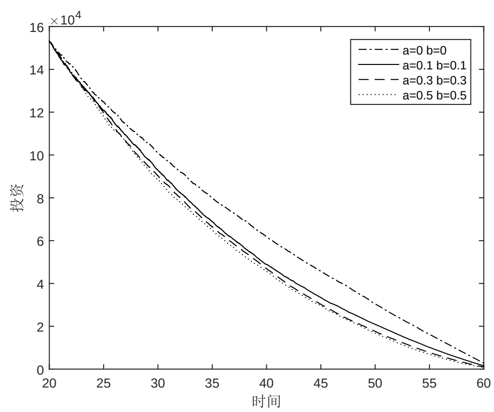

图 4 不同消费习惯水平下的风险投资支出路径对比

5.3 消费习惯模式对最优决策的影响

5.3.1 消费习惯模式对最优消费的影响

在一些文献中提到，引入消费习惯会使得最优消费水平变得平滑 [13]，而在我们的数值模拟中发现，消费水平是否平滑与消费模式息息相关，图 5 描述了不同消费习惯模

式下的最优消费水平. 在 $a > b$ 和 $a = b$ 的消费习惯模式下, 由 (2.1) 可知, 消费习惯一定会逐期递增, 因而最优消费也会随着逐期递增. 当 $a = b$ 时, 根据图 2, 可知消费水平不一定会比无消费习惯的情况下要平滑, 而且当 $a < b$ 时, 消费习惯递增的速度不断加快, 此时最优消费是时间的一个凸函数, 个体在前期消费水平极低, 而后期消费水平极高, 更不会表现出消费平滑的现象. 而在 $a > b$ 的情况下, 最优消费先上升, 后下降, 更有可能出现最优消费在整个时间区间内平滑的情况. 因此一个适应能力要强的个体, 可以很好的调节自己的消费, 使自己的消费始终保持在一个合理的水平上.

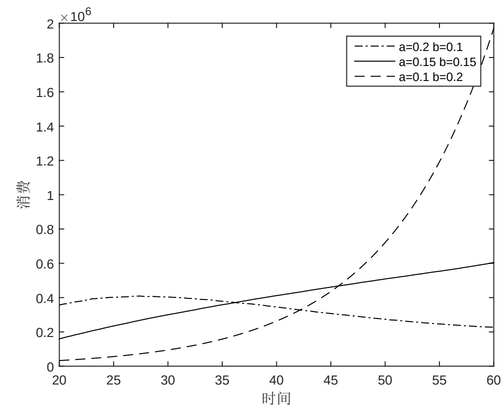

图 5 不同消费习惯模式下的最优消费

5.3.2 消费习惯模式对最优寿险决策的影响

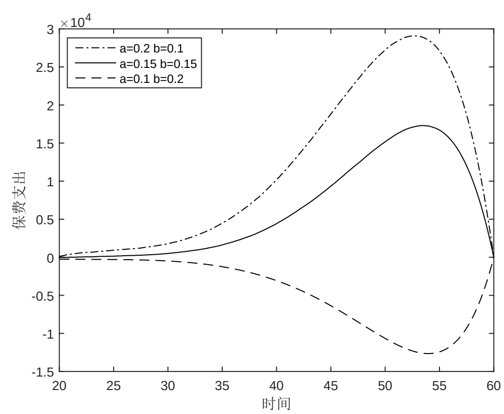

图 6 不同消费习惯模式下的最优寿险决策

从图 6 来看, 在 $a > b$ 和 $a = b$ 的消费习惯模式下, 最优的保费支出都为正, 而在 $a < b$ 的消费习惯模式下, 出现了负保费支出的情况. 个体的负保费支出相当于是向保险公司借贷, 出现这种决策, 是因为个体的财富已经无法满足其对未来消费水平的

保证．为了保证未来的消费水平，个体甚至需要向保险公司借钱投资，为未来积累财富，以满足未来的消费水平．然而，目前在保险市场上，尚没有卖空个人寿险的机制，因此，讨论如何在模型中加入卖空寿险的约束，也是本文未来的研究方向之一．

5.3.3 消费习惯模式对最优投资的影响

从图 7 中可以看到，在 $a < b$ 的消费习惯模式下，个体的投资决策要变得更加保守，这是由于个体对于未来的消费期望过高，而且个体对于环境变化的适应能力差，因此更加担心风险投资给未来带来的不确定性，所以投资决策更加保守．而在 $a > b$ 的消费模式下，个体的环境适应能力要好，个体承受风险的能力也就越大，因而会将更多的资产投入风险资产中．

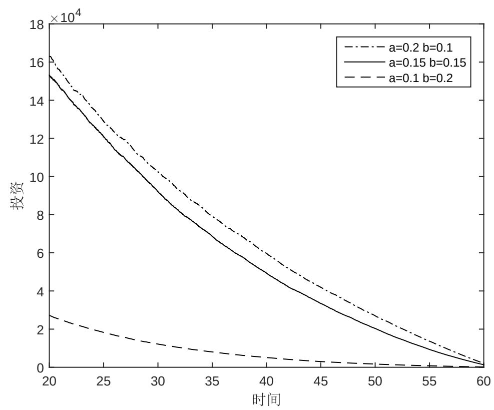

图 7 不同消费习惯模式下的最优投资

6 总结

本文假设个体决策者在退休之前有递增的收入，可以将财富分配于一种风险资产和一种无风险资产上，然后进行消费和购买人寿保险，决策者的效用来源于退休前消费，遗产以及退休时的财富三个部分．决策者通过选择自己的消费支出、保费支出和投资组合来最大化自己的期望效用的问题，已有学者进行研究，但是本文的创新之处在于引入了消费习惯，超出消费习惯的超额消费才会给决策者带来效用．

通过所得的解析解的形式进行分析，在引入消费习惯后，发现财富和收入对消费仍然有正向的影响，而消费习惯对消费的影响取决于参数的假设．收入对保费支出的影响为正，消费习惯对保费支出的影响为负，也就是说消费对于保费支出有挤出效应．而财富对于保费支出的影响难以判断，需要代入具体的参数进行判断．当市场的风险价格为正时，决策者的财富和收入的增加会使投资更多的风险资产，但是消费习惯的存在会令个体减少风险投资的头寸，个体的投资行为会变得更加保守．

进一步，我们通过对解析解分析发现最优消费、寿险和投资决策依旧保持经典 Merton 模型中的一些性质. 我们发现个体是基于可用资产进行决策的, 可用资产是由财富, 人力资本以及为了保证未来消费的未来消费负债组成的. 当引入消费习惯之后给最优消费、寿险和投资决策带来了三个方面的影响: 一是可用资产要减去未来消费负债, 因此要小于无消费习惯的个体的可用资产, 从而导致个体的风险资产投资变小; 二是最优消费和寿险决策中共有的子 $k(t)$ 会发生变化, 当相对风险厌恶系数大于 1 时, 有消费习惯的乘子大, 从而降低保费支出, 当相对风险厌恶系数小于 1 时, 有消费习惯的乘子小; 三是最优消费不再仅仅只是可用资产的一个比例, 还附加上了消费习惯. 而且对最优消费进行微分后发现, 当相对风险厌恶系数大于 1 时, 消费习惯的引入会减小最优消费变化的波动率.

最后, 采用我国的相关数据对消费习惯高低和消费习惯模式给最优决策带来的影响分别进行分析. 我们发现, 首先, 消费习惯越高的个体, 其消费路径越是陡峭, 并且个体超过消费标准进行超额消费的能力越小, 而适应能力更强的个体, 其消费水平更平滑; 其次, 消费习惯越高的个体, 其保费支出就会越少, 对于消费模式为 $a \geq b$ 的个体而言, 其保费支出为正, 呈驼峰型, 而对于消费模式为 $a < b$ 个体而言, 其保费支出为负, 乘倒 U 型. 最后, 消费习惯高低对风险资产投资的影响和消费类似, 具有高消费习惯的个体前期的风险资产投资支出高于具有低消费习惯的个体, 后期反而要低, 而适应能力要差的个体能承受风险的能力更小, 其风险投资也就更少.

致谢 本文作者感谢审稿人的宝贵意见.

参 考 文 献

[1] Merton R C. Lifetime portfolio selection under uncertainty: the continuous-time Case. *The Review of Economics and Statistics.*, 1969, 51(3): 247–257

[2] Yarri M E. Uncertain lifetime, life Insurance, and the theory of the consumer. *The Review of Economic Studies.*, 1965, 32(2): 137–150

[3] Richard S F. Optimal consumption, portfolio and life insurance rules for an uncertain lived individual in a continuous time model. *Journal of Financial Economics.*, 1975, 32(2): 187–203

[4] Pliska S R, Ye J C. Optimal life insurance purchase and consumption /investment under uncertain lifetime. *Journal of Banking and Finance.*, 2007, 31(5): 1307–1319

[5] Duarte I, Pinheiro D, Pinto A A, Pliska S R. Optimal life insurance purchase, consumption and investment on a financial market with multi-dimensional diffusive terms. *Optimization*, 2014, 64(11): 1737–1760

[6] 丁传明, 邹捷中. 考虑人寿保险的最有金融决策. *系统工程*, 2003, 21(5): 84–87
(Ding C M, Zou J Z. A study on optimal financial choices considering life insurance. *System Engineering.*, 2003, 21(5): 84–87)

[7] 景珮, 李秀芳. 基于连续时间的金融理论人寿保险需求问题探究. *南开经济研究*, 2013, 2013(1): 91–103
(Jing P, Li X F. The demand for life insurance-based on continuous-time finance theory. *Nankai*

Economic Studies, 2013, 2013(1): 91–103)

[8] 梁宗霞, 赵笑阳. 一类含消费、寿险和投资的随机最优控制问题. 中国科学: 数学, 2016, 46(12): 1863–1882 (Liang Z X, Zhao X Y. Optimal investment, consumption and life insurance under stochastic framework. *Science China: Mathematics.*, 2016, 46(12): 1863–1882)

[9] Camobell J, Deaton A. Why is Consumption so smooth? *The Review of Economic Studies*, 1989, 56(3): 357–373

[10] Lally P, Jaarsveld C H M V, Potts H W W, Wardle J. How are habits formed: modelling habit formation in the real world. *European Journal of Social Psychology*, 2010, 40(6): 998–1009

[11] Detemple J B, Zapatero F. Optimal consumption-portfolio policies with habit formation. *Mathematical Finance*, 1992, 2(4): 251–274

[12] Diaz A, Pijoan-Mas J, Rios-Rull J V. Precautionary savings and wealth distribution under habit formation preferences. *Journal of Monetary Economics*, 2003, 50(6): 1257–1291

[13] 冯蕾，梁治安．消费习惯，退休养老计划与最优消费投资．现代经济探讨, 2015, 2015(6): 77–81 (Feng L, Liang Z A. Habit formation 、retirement plan and optimal consumption-investment. *Modern Economic Research*, 2015, 2015(6): 77–81)

[14] Ben-Arab M, Briys E, Schlesinger H. Habit formation and demand for insurance. *The Journal of Risk and Insurance*, 1996, 63(1): 111–119

[15] Naziha K, Ben-Ahmed K, Ben-Arab M. Consumer behavior and demand for insurance under uncertainty: the continuous time case study. *International Journal of Economic Perspectives.*, 2013, 7(3): 47–56

[16] 李纯青，徐寅峰．动态消费者选择模型及贴现因子的确定．管理科学学报, 2005, 8(3): 50–55 (Li C Q, Xu Y F. Determining of consumer choice models and discount factor. *Journal of Management Sciences in China*, 2005, 8(3): 50–55)

[17] Constantinides, George M. Habit formation: A resolution of the equity premium puzzle. *The Journal of Political Economy*, 1990, 98(3): 519–543

[18] 熊和平，李淑懿，余均．消费习惯，异质偏好与资产定价．管理科学学报, 2012, 15(9): 65–73 (Xiong H P, Li S Y, Yu J. Habits formation, heterogeneous preferences and asset pricing. *Journal of Management Sciences in China.*, 2012, 15(9): 65–73)

Optimal Consumption, Life Insurance and Investment Decision with Habit Formation

LIU Jingzhen

(*China Institute for Actuarial Science,*
Central University of Finance and Economics, Beijing 100081*, China*)

LIN Liyuan

(*School of Insurance, Central University of Finance and Economics, Beijing* 100081*, China*)

MENG Hui†

(*China Institute for Actuarial Science,*

Central University of Finance and Economics, Beijing 100081*, China*)

(*E-mail: menghuidragon@126.com*)

Abstract In this paper, we consider the optimal consumption, life insurance and investment problem with habit formation. We assume that the individual invests his wealth in a risk-free asset and a risky asset, and he purchases life insurance before retirement. His goal is to maximize the utility which consists of the utility from consumption before retirement or death, wealth at the retirement and heritage. From the dynamic programming principle, the problem is reduced to solve HJB equation. We obtain the explicit solutions of optimal strategy for the CRRA case. The result is that when the habit formation is included, the individual's investment amount is smaller than that without habit formation. Furthermore, the low bound of the optimal consumption depends on time, while it's zero in the classic case. If the individual's relative risk aversion is greater than 1, we also found that both the volatility of optimal consumption and the optimal insurance purchase are smaller than that in the classic case. Then we use the data in China to carry out numerical simulation in order to analyze how habit formation influences the optimal strategy. We found that when the habit formation level becomes higher, the difference of consumption between early and late periods become more significant, and the investment and the insurance purchase become less. The stronger the adaptability of the individual is, the smoother the consumption would be and the individual has stronger ability to take risks which lead to more investment in risk asset.

Key words habit formation; life insurance; dynamic control; optimal strategy; utility function

MR(2000) Subject Classification 70H20; 60H30

Chinese Library Classification F830.42